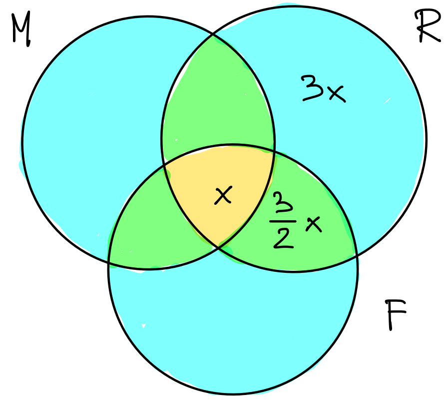
Diskretne strukture UNI, 24.12.2021 (9:15 - 11:00, P20)

6. V neki občini se je 100 učencev udeležilo tekmovanja iz matematike, 50 tekmovanja iz računalništva in 48 tekmovanja iz fizike. Število učencev, ki so se udeležili natanko enega tekmovanja, je dvakrat večje od števila učencev, ki so šli na natanko dve tekmovanji, in trikrat večje od števila učencev, ki so šli na vsa tri tekmovanja. Koliko učencev je šlo na vsa tri tekmovanja?




$|M| = 100$
$|R| = 50$
$|F| = 48$

$$3x + \frac{3}{2}x + x = |M \cup R \cup F| = \underset{100}{|M|} + \underset{50}{|R|} + \underset{48}{|F|} - \underbrace{\left(|M\cap R| + |M \cap F| + |R \cap F|\right)}_{\frac{3}{2}x + 3x} + \overbrace{|M \cap R \cap F|}^{x}$$

$$9x = 198 \quad \ldots \quad \underline{x = 22}$$

22 učencev je šlo na vsa 3 tekmovanja.

REA

1. Z razširjenim Evklidovim algoritmom poišči največji skupni delitelj števil

(a) 330 in 98, (b) 189 in 40, (c) 260 in 147, (d) 637 in 26.

(a)

$$
\begin{aligned}
330 &= 330\cdot 1 + 98\cdot 0\\
98 &= 330\cdot 0 + 98\cdot 1\\
36 &= 330\cdot 1 + 98\cdot(-3)\\
26 &= 330\cdot(-2) + 98\cdot 7\\
10 &= 330\cdot 3 + 98\cdot(-10)\\
6 &= 330\cdot(-8) + 98\cdot 27\\
4 &= 330\cdot 11 + 98\cdot(-37)\\
\gcd(330,98) \rightarrow 2 &= 330\cdot(-19) + 98\cdot 64\\
0 &
\end{aligned}
$$

$330 : 98 = 3$ (ost. 36)
$98 : 36 = 2$ (ost. 26)
$36 : 26 = 1$ (ost. 10)
$26 : 10 = 2$ (ost. 6)
$10 : 6 = 1$ (ost. 4)
$6 : 4 = 1$ (ost. 2)
$4 : 2 = 2$ (ost. 0)

(d)

$$
\begin{aligned}
637 &= 637\cdot 1 + 26\cdot 0\\
26 &= 637\cdot 0 + 26\cdot 1\\
(*)\quad 13 &= 637\cdot 1 + 26\cdot(-24)\\
(**)\quad 0 &= 637\cdot(-2) + 26\cdot 49
\end{aligned}
$$

$\gcd(637,26)$

$637 : 26 = 24$ (ost. 13)
$26 : 13 = 2$ (ost. 0)

---

**Linearna diofantska enačba** (z dvema neznankama) je enačba oblike:

$\underbrace{\text{Linearna diofantska enačba}}_{\text{LDE}}$

$$ax + by = c, \quad \text{kjer so } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Rešitve $(x,y)$ iščemo le med celimi št., $x, y \in \mathbb{Z}$.

Primer: $637x + 26y = 39$

LDE ima rešitev, če $\gcd(a,b) \mid c$.

$\gcd(637,26) = 13 \mid 39$,

torej je en. iz primera rešljiva.

$$
+\begin{cases}
(*)\cdot 3 \ldots & 637\cdot \underset{x_0}{3} + 26\cdot \underset{y_0}{(-72)} = 39\\
(**)\cdot k \ldots & 637\cdot(-2k) + 26\cdot 49k = 0
\end{cases}
$$

$$637\cdot(3-2k) + 26\cdot(49k-72) = 39$$

$(x_0, y_0) = (3, -72)$ je ena od rešitev te LDE

$(x_k, y_k) = (3-2k, 49k-72)$, $k \in \mathbb{Z}$ predstavlja vse rešitve te LDE.

2. Reši linearne diofantske enačbe

(a) $15x+33y=6$, (b) $7x-2y=1$, (c) $65x+39y=20$.

(a)
$$\begin{aligned}
33 &= 33\cdot 1 + 15\cdot 0 \\
15 &= 33\cdot 0 + 15\cdot 1 \\
3 &= 33\cdot 1 + 15\cdot(-2) \\
0 &= 33\cdot(-5) + 15\cdot 11
\end{aligned}$$

$33:15 = 2$ (ost. 3)
$15:3 = 5$ (ost. 0)

$\cdot 2$, $\cdot k$

$$\begin{aligned}
15\cdot\overset{x_0}{(-4)} + 33\cdot\overset{y_0}{2} &= 6 \\
15\cdot 11k + 33\cdot(-5k) &= 0
\end{aligned} \Big\} +$$

$$15\cdot(11k-4) + 33\cdot(2-5k) = 6$$

Torej: $(x_k, y_k) = (11k-4,\ 2-5k),\ k\in\mathbb{Z}$ je splošna rešitev te LDE.

Ali: Če je $(x_0,y_0)$ ena od rešitev $ax+by=c$, potem lahko vse rešitve te LDE opišemo z:

$$(x_k,y_k) = \left(x_0 - \frac{b}{\gcd(a,b)}k\ ,\ y_0 + \frac{a}{\gcd(a,b)}k\right).$$

Poskusimo uganit eno rešitev $15x+33y=6$.

npr.: $(x_0,y_0) = (7,-3)$, potem:

$$(x_k,y_k) = \left(7 - \frac{33}{3}k\ ,\ -3 + \frac{15}{3}k\right) = (7-11k,\ -3+5k)$$

(b) $7x-2y=1$

Uganemo rešitev: $(x_0,y_0) = (1,3)$

Vse rešitve: $\underline{(x_k,y_k)} = \left(1 - \frac{-2}{\gcd(7,2)}k\ ,\ 3 + \frac{7}{\gcd(7,2)}k\right) = \underline{(1+2k,\ 3+7k)}$

Ali:
$$\begin{aligned}
7 &= 7\cdot 1 + 2\cdot 0 \\
2 &= 7\cdot 0 + 2\cdot 1 \\
1 &= 7\cdot 1 + 2\cdot(-3) \\
0 &= 7\cdot(-2) + 2\cdot 7
\end{aligned}$$

$(x_0,y_0) = (1,3)$

$$7\cdot 1 - 2\cdot 3 = 1$$
$$\xrightarrow{\cdot k}\ 7\cdot(-2k) - 2\cdot(-7k) = 0$$

$$(x_k,y_k) = (1-2k,\ 3-7k),\ k\in\mathbb{Z}$$

(c) $\gcd(65,39) = 13 \nmid 20$, torej enačba nima rešitev.

3. Šolarji so šli na ekskurzijo v muzej. Vstopnica za odrasle stane 10€, za otroke pa 6€. Skupaj so plačali 156€. Koliko je bilo odraslih in koliko otrok, če veš, da je bilo otrok vsaj petkrat več?

št. odraslih → $x$, št. otrok → $y$

$$10x + 6y = 156 \qquad (\text{vemo še } y \geq 5x)$$

$$\begin{aligned}
&10 = 10\cdot 1 + 6\cdot 0\\
(*)\quad &6 = 10\cdot 0 + 6\cdot 1 \xrightarrow{\cdot 26} 10\cdot 0 + 6\cdot 26 = 156\\
&4 = 10\cdot 1 + 6\cdot(-1)\\
&2 = 10\cdot(-1) + 6\cdot 2\\
(**)\quad &0 = 10\cdot 3 + 6\cdot(-5) \xrightarrow{\cdot k} 10\cdot 3k + 6\cdot(-5k) = 0
\end{aligned}$$

$+$

(Ker $6 \mid 156$, bomo izbrali kar $(*)$.)

$(x_k, y_k) = (3k, 26-5k)$ to je splošna rešitev

Zanimajo nas rešitve $x_k > 0$, $y_k \geq 0$ in še $y_k \geq 5x_k$

$3k > 0 \;\vdots\; k > 0$ oz. $k \geq 1$

$26 - 5k \geq 0 \;\vdots\; k \leq \frac{26}{5} = 5.2$ oz. $k \leq 5$

$26 - 5k \geq 5\cdot 3k \;\vdots\; 26 \geq 20k$, $k \leq \frac{26}{20}$ oz. $k \leq 1$

Torej $k = 1$ in

$(x_1, y_1) = (3, 21)$, Muzej je obiskalo 21 otrok in 3 odrasli.

6. Določi najmanjše naravno število $x$, za katerega da $157x$ ostanek 10 pri deljenju s 24.

$157x : 24 = y \;(\text{ost. } 10)$

$157x - 24y = 10$ (to je LDE)

$$\begin{aligned}
&157 = 157\cdot 1 + 24\cdot 0\\
&24 = 157\cdot 0 + 24\cdot 1 && 157 : 24 = 6\ (\text{ost. } 13)\\
&13 = 157\cdot 1 + 24\cdot(-6) && 24 : 13 = 1\ (\text{ost. } 11)\\
&11 = 157\cdot(-1) + 24\cdot 7 && 13 : 11 = 1\ (\text{ost. } 2)\\
(*)\quad &2 = 157\cdot 2 + 24\cdot(-13) && 11 : 2 = 5\ (\text{ost. } 1)\\
&1 = 157\cdot(-11) + 24\cdot 72 && 2 : 1 = 2\ (\text{ost. } 0)\\
&0 = 157\cdot 24 + 24\cdot(-157)
\end{aligned}$$

$(*)\cdot 5 \;\ldots\; 157\cdot 10 + 24\cdot(-65) = 10 \;\ldots\; (x_k, y_k) = (10 + 24k, -65 - 157k)$

Najmanjši $x_k = 10 + 24k$ je $\underline{x_0 = 10}$.

5. Reši linearne diofantske enačbe

(a) $21x + 15y - 6z = 9$,  (b)

Rešitve bomo poiskali z Eulerjevo metodo (za LDE):

Izberemo neznanko, ki ima po abs. vrednosti najmanjši koef.:

$$6z = 21x + 15y - 9 \quad /:6$$

$$z = \frac{21}{6}x + \frac{15}{6}y - \frac{9}{6} = \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2} =$$

$$= \left(3 + \frac{1}{2}\right)x + \left(2 + \frac{1}{2}\right)y - 1 - \frac{1}{2}$$

$$z = 3x + 2y - 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)}_{u \in \mathbb{Z}}$$

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \quad /\cdot 2$$

$$2u = x + y - 1 \quad \ldots \quad 2u - x - y = -1$$

Spet izberemo neznanko, ki ima po abs. vred. najmanjši koef.:

$$y = 2u - x + 1$$

$$z = 3x + 2(2u - x + 1) - 1 + u = x + 5u + 1$$

$$x = x$$

Za $x, u \in \mathbb{Z}$ je $(x, y, z) = (x, 2u - x + 1, x + 5u + 1)$ spl. reš. te LDE.