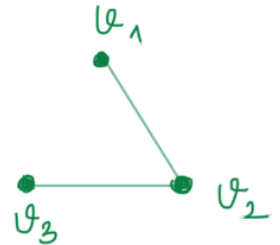


DS 12. teden

Teorija grafov

* GRAF $G = (V, E)$

vertices
 V - množica točk (vozlišč)
 E - množica povezav (neusmerjene)
edges



* $\deg(v)$ - STOPNJA VOZLIŠČA v
(število sosedov vozlišča v)

* LEMA O ROKOVANJU:

$G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Potem velja

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = 2 \cdot |E|$$

št. povezav

↳ vsota stopenj vseh vozlišč je
zmeraj sodo število.

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3\}$$

$$\deg(v_1) = 1$$

$$\deg(v_2) = 2$$

$$\deg(v_3) = 1$$

$$1 + 2 + 1 = 4$$

||

$$2 \cdot 2$$

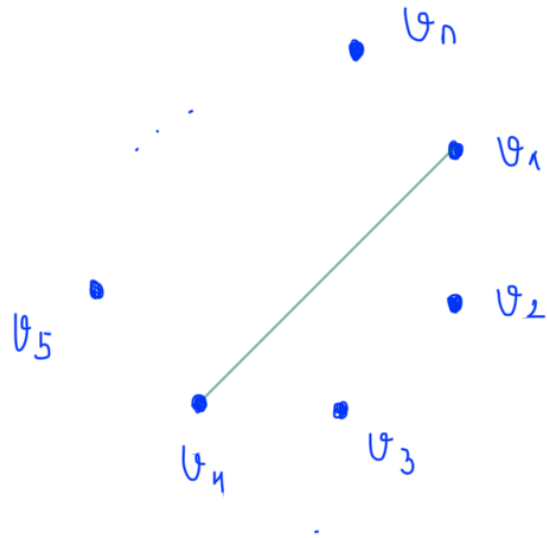
||

$$2 \cdot |E|$$

✓

① a) Imamo n ljudi $\Rightarrow n$ točk v grafu.

Povezave predstavljajo prijateljstvo (v_1 in v_4 sta prijatelja)



Želimo pokazati, da 2 točki imata isto stopnjo.

Predpostavimo, da vse točke imajo različno stopnjo.

Največja možna stopnja je $n-1$, najmanjša pa 0.



v_1 mora biti povezana z vsami točkami

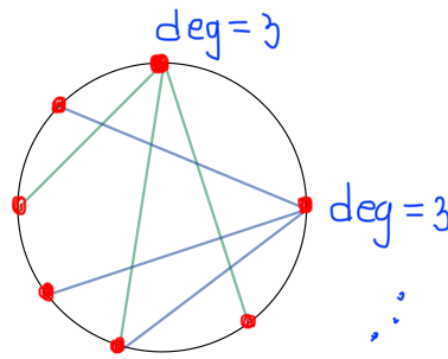
v_n nima nobenega sosesa

protislovje!

vsaj 2 točki imata isto stopnjo! $\Leftarrow$

b) 15 ljudi, vsak poda 3 darila

liho število vozlišč lihe stopnje ni možno

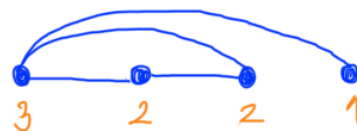


$$\deg(v_1) + \dots + \deg(v_{15}) = 2 \cdot |E|$$

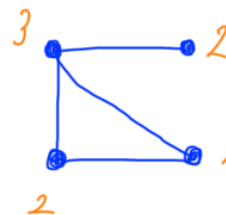
$$3 \cdot 15 = 2 \cdot |E|$$

$$|E| = \frac{45}{2} \quad \text{ni možno}$$

2) a) G , 4 vozlišča, stopnje 1, 2, 2, 3



ali



b) G , 5 vozlišč, stopnje 1, 1, 2, 3, 4

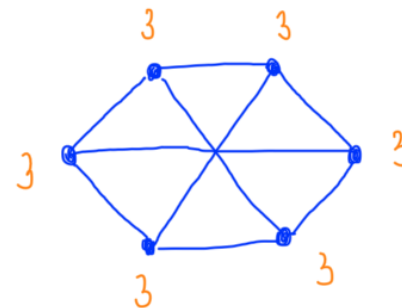
ni možno, ker imamo 3 točke lihe stopnje

$1+1+2+3+4 = 11 \leftarrow$ vsota mora biti sodo število!

c) G , 5 vozlišč, stopnje 1, 2, 2, 4, 5 ni možno, ker je največja možna stopnja 4!



d) G , 6 vozlišč, 3-regularen - vse točke stopnje 3

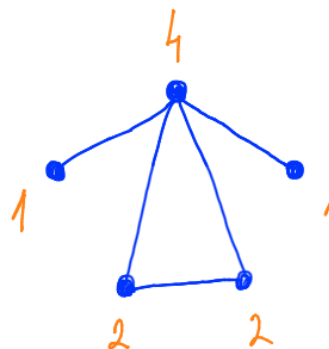


e) G , 5 vozlišč, 5 povezav

$$\Delta(G) = 4, \delta(G) = 1$$

NAJVEČJA
STOPNJA V G

NAJMANJŠA
STOPNJA V G



GRAFA G_1 IN G_2 STA **IZOMORFNA**, ČE OBSTAJA PRESLIKAVA

$$f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

ZA KATERO VELJA:

$$G_1 \cong G_2$$

- f je bijektivna in

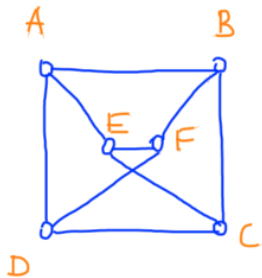
- $u \sim_{G_1} v \Rightarrow f(u) \sim_{G_2} f(v)$

(če sta u in v sosedata v G_1 , potem sta tudi $f(u)$ in $f(v)$ sosedata v G_2)

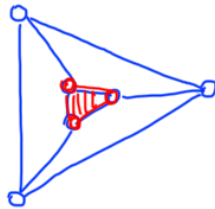
! Izomorfizem ohranja število vozlišč, število povezav, stopnje, število trikotnikov...

③ Ali so grafi izomorfni?

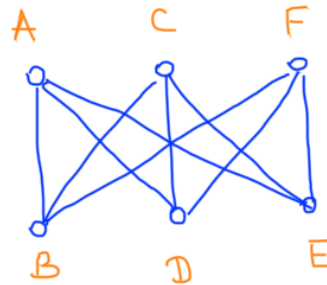
a)



G_1



G_2



G_3

$$G_1 \cong G_3$$

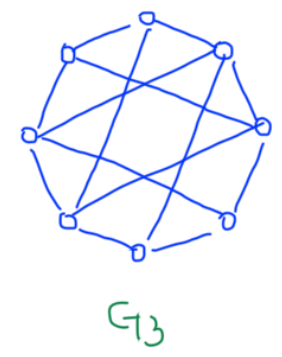
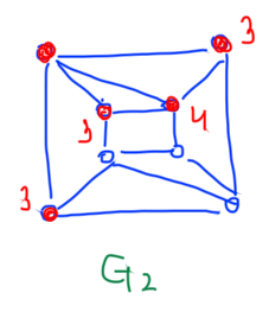
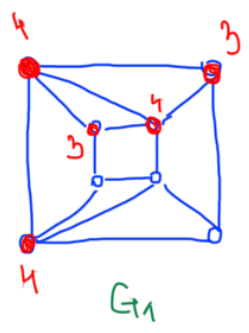
$$G_1 \not\cong G_2$$

$$G_3 \not\cong G_2$$

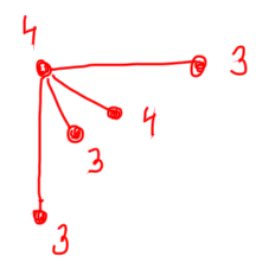
ker G_2 vsebuje
trikotnik

(C_3 -cikel dolžine 3)

b)



$G_1 \neq G_3$
 $G_2 \neq G_3$ } ker G_3 ne vsebuje G_3 (trikotnike)



→ G_1 : točka stopnje 4 ima : 2 soseda stopnje 3
 2 soseda stopnje 4
 G_2 : točka stopnje 4 ima : 3 sosede stopnje 3
 1 soseda stopnje 4
 } $G_1 \neq G_2$

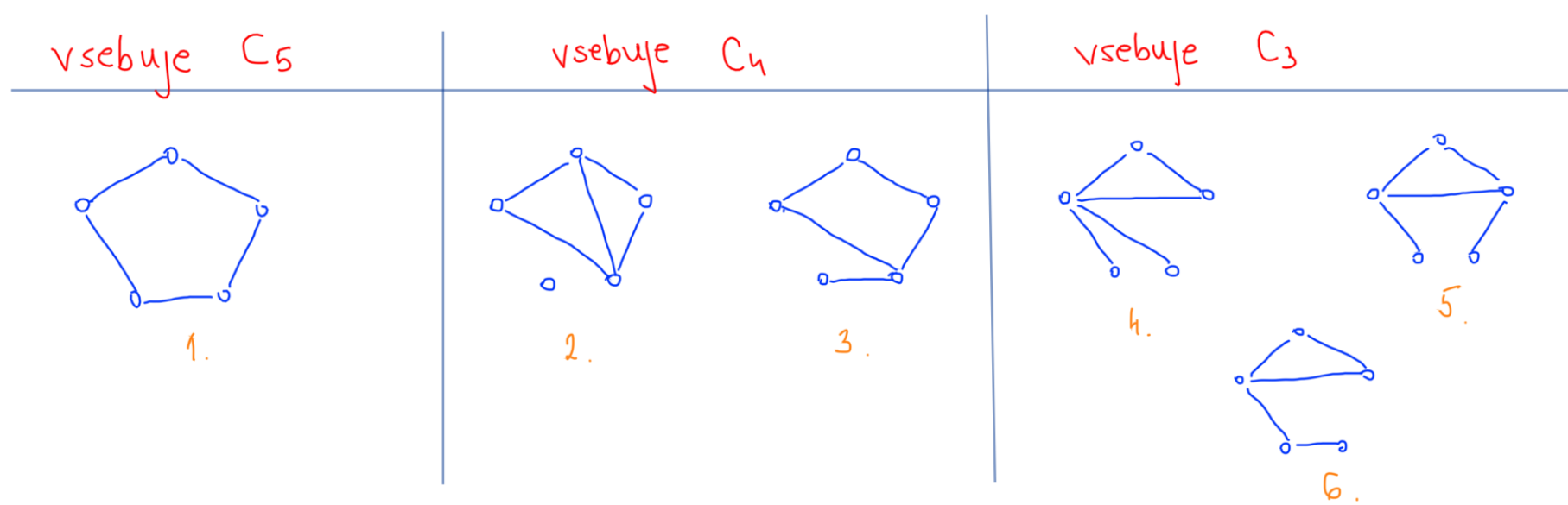
1) a) Paroma neizomorfni grafi na 4 vozliščih: $M = |E|$ - št. povezav

$M=0$	$M=1$	$M=2$	$M=3$	$M=4$	$M=5$	$M=6$
1.	2.	3.	5.	7.	10.	11.
4.		6.	8.	9.		
			7.			

N_4
 PRAZEN
 GRAF

K_4 POLN
 GRAF

b) Paroma neizomorfne grafe 5 vozlišč, 5 povezav Vsak graf z n vozlišči in vsaj n povezavami vsebuje cikel!

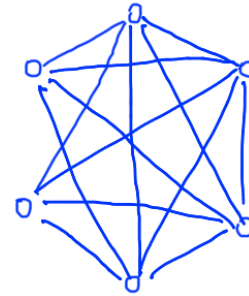


c) Paroma neizomorfne grafe, 6 vozlišč, 14 povezav

Poglejmo najprej K_6 (poln graf na 6 vozliščih)

Število povezav v K_6 je: $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \underline{\underline{15}}$

$\Rightarrow$ iz polnega grafa K_6 izbrisemo eno povezavo:



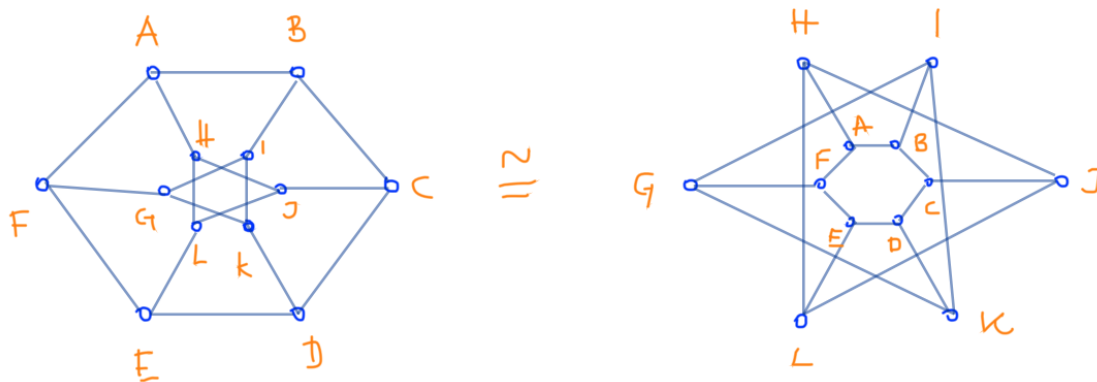
POLN GRAF K_n
Število povezav

$$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

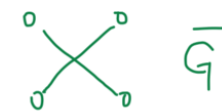
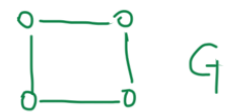
5. a) SKUPNE LASTNOSTI:
- število vozlišč 12
 - število povezav 18
 - vse točke stopnje 3 (3-regularen ali kubičen graf)
 - vsi vsebujejo C_3
 - vsi vsebujejo C_5
 -

b) $G_2 \not\cong G_1$ in $G_2 \not\cong G_3$, ker G_2 ni povezan, G_1 in G_3 sta povezana.

$$G_1 \cong G_3$$

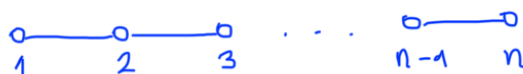


$\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ - KOMPLEMENT GRAFA $G = (V, E)$: $\bar{V} = V$
 $\bar{E}$ vsebuje vse povezave, ki niso v E ni.

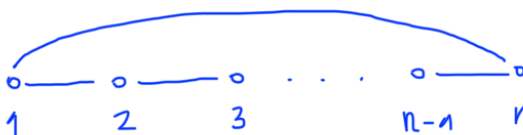


• GRAF G JE SEBIKOMPLEMENTAREN $\Leftrightarrow G = \bar{G}$

P_n - pot na n vozliščih



C_n - cikel na n vozliščih



6. P_4



$\bar{P}_4$



$P_4 = \bar{P}_4$ ✓

P_5



$\bar{P}_5$



$P_5 \neq \bar{P}_5$ ✓

C_4



$\bar{C}_4$



$C_4 \neq \bar{C}_4$ ✓

C_5



$\bar{C}_5$



$C_5 = \bar{C}_5$ ✓