

Diskretne strukture

Dvanajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

21. december 2021

- *Sprehod* S v grafu $G = (V, E)$ je zaporedje vozlišč

$$u_0 u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n,$$

pri čemer sta zaporedni vozlišči sprehoda u_i in u_{i+1} sosedi v grafu G ($i = 0, \dots, n-1$). Dolžina sprehoda $S = u_0 u_1 \dots u_n$ je enaka n , kar pišemo kot $|S| = n$.

Opomba

Tudi u_0 je sprehod. Njegova dolžina je 0. (To bomo potrebovali kasneje.)

- Sprehod S je *pot*, če je $u_i \neq u_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n$.
- Sprehod S je *obhod*, če je $u_0 = u_n$.
- Sprehod S je *cikel*, če je $u_0 = u_n$, sicer pa so točke med sabo različne in je $n \geq 3$.

Povezanost grafov in povezane komponente

Graf G je *povezan*, če za vsaki dve vozlišči $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja sprehod z začetkom v u in koncem v v .

Razdalja med vozliščema u in v , tj. $d(u, v)$, je dolžina najkrajše poti od vozlišča u do v . Če u in v nista povezana, potem je $d(u, v) = \infty$. Posebej: $d(u, u) = 0$.

V množici točk grafa G definirajmo relacijo P z naslednjim predpisom:

$$uPv \iff \text{v } G \text{ obstaja sprehod od } u \text{ do } v.$$

Trditev

Relacija P je ekvivalenčna.

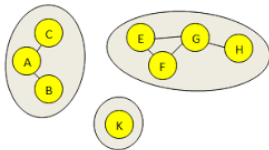
Dokaz.

Refleksivnost: $(u, u) \in P$, saj je u tudi sprehod.

Simetričnost: Iz $(u, v) \in P$ sledi $(v, u) \in P$, saj lahko na sprehodu od u do v samo obrnemo zaporedje vozlišč in dobimo sprehod od v do u .

Tranzitivnost: Iz $(u, v) \in P$ in $(v, w) \in P$ sledi $(u, w) \in P$, saj lahko združimo sprehoda od u do v in od v do w , da dobimo sprehod od u do w . $\square$

Ekvivalenčni razredom vozlišč glede na relacijo P pravimo *komponente za povezanost*.

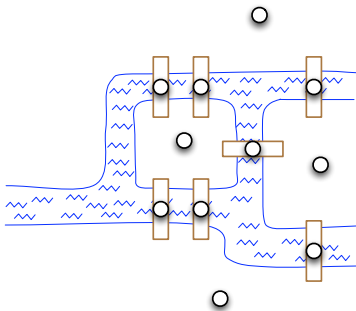


Eulerjev problem

Spomnimo se vprašanja:

Kako naj poštar optimalno razvozi pošto v nekem naselju, tako da po nobeni cesti ne bo rabil iti dvakrat, a bo obiskal vse hišne številke vzdolž vseh cest?

Zanimivost: Prvotno se je to vprašanje pojavilo v 18. stoletju v mestu Königsberg (1736), rešil pa ga je znan matematik Leonard Euler.



Ali obstaja obhod po mestu, ki bi prehodil vse mostove in sicer vsakega natanko enkrat?

Eulerjevi grafi

Euler je zgornji problem prevedel v vprašanje iz teorije grafov. Vsem delom kopnega je priredil vozlišče grafa, mostovi pa predstavljajo povezave med vozliščema. Vprašanje je, ali lahko najdemo v grafu obhod, ki bi šel skozi vse povezave, pri čemer čez vsako natanko enkrat.

Problem poštarja bi prevedli v analogno vprašanje tako, da vsem križiščem (vsakemu stičišču, kjer se stikajo vsaj 3 ceste), priredimo vozlišče grafa, vozlišči pa povežemo, če ju povezuje cesta (na kateri ni drugih križišč). Spet je vprašanje, ali lahko najdemo v tem grafu obhod, ki bi šel skozi vse povezave, pri čemer čez vsako natanko enkrat.

Nekaj definicij:

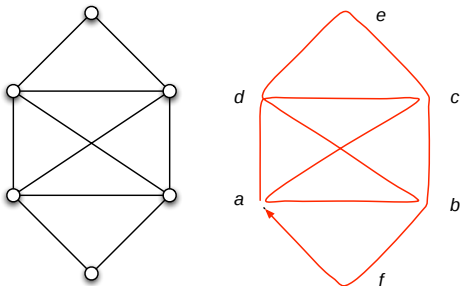
Sprehod v grafu G je *enostaven*, če vsako povezavo *uporabi* največ enkrat.

Vprašanje: *Ali v grafu G obstaja enostaven obhod, ki vsebuje vse povezave?*

Smiselno je zahtevati še, da je graf povezan. V nasprotnem problem rešujemo v vsaki povezani komponenti posebej (v jeziku poštarja vsaka komponenta predstavlja neko naselje).

Enostaven obhod v grafu G , ki vsebuje vse povezave in vse točke imenujemo *Eulerjev obhod*.

Graf G je *Eulerjev*, če ima kak Eulerjev obhod.



Izrek (Euler)

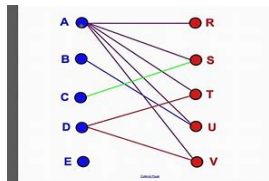
Graf G je Eulerjev natanko tedaj, ko je G povezan in so vse njegove točke sode stopenji.

Dokaz. Smer ($\Rightarrow$): Če je graf Eulerjev, potem ima Eulerjev obhod. To najprej pomeni, da je G povezan. Hkrati na obhodu v vsako točko, razen začetne oz. končne, vstopimo in izstopimo. To pomeni, da pri vsakem prehodu porabimo dve povezavi s krajišči v tej točki. Skupaj torej $2k$ povezav, kjer je k število prehodov. Za začetno oz. končno točko pa na začetku in koncu porabimo po eno povezavo, pri vsakem vmesnem prehodu pa dve povezavi. Torej je tudi ta točka sode stopnje.

Smer ($\Leftarrow$). Naj bo $\mathcal{O} = u_0 u_1 \dots u_n$, $u_0 = u_n$, najdaljši enostaven obhod v grafu G . Radi bi pokazali, da $\mathcal{O}$ vsebuje vse povezave. V nasprotnem obstaja še neka povezava v grafu, ki je nismo porabili. Obstajati mora tudi povezava s krajiščem v neki točki obhoda $\mathcal{O}$, saj sicer graf ne bi bil povezan. Vozlišča $u_0, \dots, u_n$ bi bila svoja komponenta za povezanost. Naj torej iz vozlišča u_i vodi neka povezava $\{u_i, v_1\}$. Na $\mathcal{O}$ smo v vsakem vozlišču porabili sodo število povezav (v vsako vozlišče pridemo in odidemo iz njega). Po povezavi $\{u_i, v_1\}$ iz u_i pridemo v v_1 . Ker je v_1 sode stopnje in smo na $\mathcal{O}$ porabili sodo mnogo povezav, mora obstajati še neka povezava $\{v_1, v_2\}$. Nadaljujemo ta premislek in ker je povezav končno mnogo, se po končno mnogo korakov vrnemo v u_i . Če se vrnemo v kakšnega od ostalih v_j -jev, ga bomo lahko tudi zapustili, saj smo porabili samo liho mnogo povezav. Pri tem smo naredili enostaven obhod $\mathcal{O}_1 = u_i v_1 v_2 \dots v_m$, $u_i = v_m$. Sedaj pa lahko $\mathcal{O}$ podaljšamo z obhodom $\mathcal{O}_1$ in dobimo daljši obhod. To pa je protislovje. Torej je $\mathcal{O}$ Eulerjev obhod.

Dvodelni grafi

Graf G je *dvodelen*, če lahko točke grafa G pobarvamo z dvema barvama tako, da ima *vsaka* povezava krajišči različnih barv.



Izrek

Naj bo $G = (V, E)$ graf. Naslednje trditve so ekvivalentne:

- 1 G je dvodelen.
- 2 G ne vsebuje obhoda lihe dolžine.
- 3 G ne vsebuje cikla lihe dolžine.

Implikacija $(1) \Rightarrow (2)$: Naj bo G dvodelen. Dokažimo, da ne vsebuje obhodov lihe dolžine. Dokazujemo s protislovjem. V kolikor bi imeli obhod lihe dolžine, potem bi po lihem številu korakov prišli iz nekega vozlišča nazaj vase. Toda na vsakem koraku zamenjamo barvo vozlišča, zato bi morali biti po liho mnogo korakov v vozlišču nasprotne barve. To pa je protislovje.

Implikacija $(2) \Rightarrow (1)$: Predpostavimo lahko, da je G povezan, sicer dokazujemo v vsaki komponenti za povezanost posebej. Naj bo v neko izbrano vozlišče. Definirajmo množici

$$A := \{u \in V(G) : d(u, v) \text{ je liho.}\}, \quad B := \{u \in V(G) : d(u, v) \text{ je sodo.}\}.$$

A in B sta iskana barvna razreda. Če bi bili dve točki u_1, u_2 iz npr. A povezani, potem bi imeli obhod lihe dolžine, ki se začne in konča v u in gre prek u_1 ter u_2 . To je protislovje.

Implikacija $(2) \Rightarrow (3)$: To je očitno, saj je vsak cikel tudi obhod.

Implikacija $(3) \Rightarrow (2)$: Naj bo $\mathcal{O} = u_0 u_1 \dots u_{n-1} u_0$ obhod lihe dolžice, ki je najkrajši med vsemi obhodi lihe dolžine. Dokazali bomo, da je $\mathcal{O}$ cikel. Torej moramo dokazati, da iz $u_i = u_j$, $i < j$, sledi $i = 0$ in $j = n$.

Naj bosta torej i, j indeksa, za katera velja $u_i = u_j$ in $i < j$. Potem sta $u_0 u_1 \dots u_i u_{j+1} \dots u_{n-1} u_n$ in $u_i u_{i+1} \dots u_j$ oba obhoda v G . Natanko eden od njiju je lihe dolžine. Če $i \neq 0$ ali $j \neq n$, potem je ta obhod krajši od $\mathcal{O}$, kar je protislovje.

Spomnimo se vprašanja:

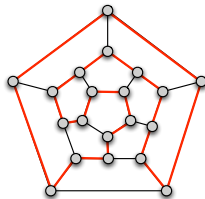
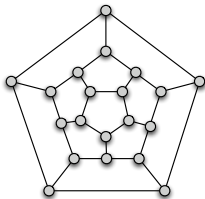
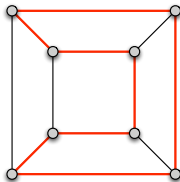
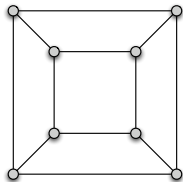
V nekem mestu bi radi postavili avtobustna postajališča na točno določene točke. Ali lahko načrtujejo avtobusno linijo, ki začne in konča na neki točki in vsako od teh postajališč obišče natanko enkrat?

V jeziku teorije grafov bi zgornje vprašanje lahko formulirali take, da vsakemu postajališču in začetni točki avtobusa priredimo vozlišče grafa, vozlišči pa povežemo, če med njima vodi direktna cesta (tj. ne gre prek nobenega drugega vozlišča). Zanima nas, ali v grafu obstaja cikel, ki gre skozi vsa vozlišča grafa.

Cikel v grafu G je *Hamiltonov*, če vsebuje vse točke grafa G .

Ime *Hamiltonov* izhaja iz priimka irskega matematika iz 19. stoletja, ki je izumil namizno igro, v kateri je bil cilj poiskati cikel skozi vse točke grafa. Ni pa se Hamilton raziskovalno ukvarjal s teorijo grafov.

Hamiltonov cikel gre skozi vsako točko **natančno** enkrat.



Kako prepoznati Hamiltonove grafe

Hamiltonov problem je mnogo **težji** kot Eulerjev. **Ne obstaja** enostavna karakterizacija Hamiltonovih grafov. To pomeni naslednje:

- Pokazati, da je graf G Hamiltonov je *relativno enostavno*. Potrebno je **samo** poiskati Hamiltonov cikel.
- Pokazati, da graf G **ni** Hamiltonov je *zelo težavno*. V splošnem je potrebno pregledati **vse** cikle v grafu, če se slučajno nekje med njimi ne skriva kakšen Hamiltonov cikel.

Spoznali bomo en nujen in en zadosten pogoj, da je graf Hamiltonov.

Definicija

Naj bo $G = (V(G), E(G))$ graf in $S \subseteq V(G)$ podmnožica vozlišč. Graf $G - S$ je graf z množico vozlišč $V(G) - S$ in vsemi povezami iz $E(G)$, ki imata obe krajišči v $V(G) - S$.

Izrek

Naj bo G povezan graf. Denimo, da obstaja takšna podmnožica točk grafa $S \subseteq V(G)$ moči $|S| = k$, za katero velja, da ima

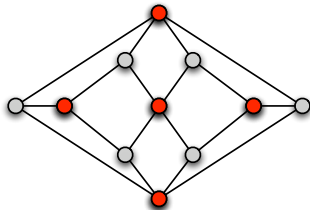
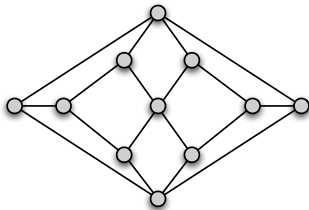
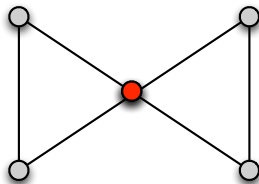
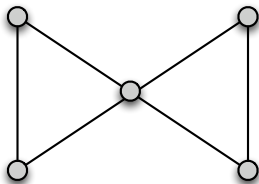
$$G - S$$

vsaj $k + 1$ povezanih komponent. Potem G ni Hamiltonov.

Toda! Če množica S iz izreka ne obstaja, to ne pomeni, da je graf Hamiltonov.

Dokaz.

Povezane komponente grafa $G - S$ so podgrafi grafa G in jih označimo z $H_1, H_2, \dots, H_\ell$, kjer je $\ell \geq k + 1$. Hamiltonov cikel bi šel posebej tudi čez vsa vozlišča vseh komponent. Ker pa lahko iz neke komponente H_i pridemo v drugo komponento H_j samo tako, da gremo prek vozlišč iz množice S , teh pa je k , lahko komponento zamenjamo samo k -krat. Za obstoj Hamiltonovega cikla bi morali komponento zamenjati vsaj $(k + 1)$ -krat. Začeli bi namreč v neki komponenti H_i . Po prepotovanju Hamiltonovega cikla bi ponovno končali v komponenti H_i , vmes pa vsaj enkrat obiskali vsako od preostalih. Torej bi imeli vsaj $k + 1$ menjav komponente prek množice S . Protislovje. □



Potrebni pogoj z razpadom grafa ima v družini dvodelnih grafov naslednjo posledico.

Posledica

*Naj bo G dvodelen graf z barvnima razredoma V_1 in V_2 .
($V(G) = V_1 \cup V_2$, V_1 je množica 'belih', V_2 množica 'črnih' točk.)
Če je $|V_1| \neq |V_2|$, potem G ni Hamiltonov.*

Dokaz.

Naj bo $|V_1| > |V_2|$. Graf $G - V_2$ ima $|V_1|$ izoliranih točk. Vsaka je svoja komponenta. Po prejšnjem izreku to pomeni, da G ni Hamiltonov. $\square$

Zadostni pogoji za hamiltonskost

Izrek (Bondy-Chavatal)

Naj bo G graf z vsaj tremi točkami ($|V(G)| = n \geq 3$) in u, v nesosednji točki, za kateri velja $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Potem je G Hamiltonov natanko tedaj, ko je $G + uv$ Hamiltonov (graf G , ki mu dodamo povezavo uv).

Posledica zgornjega izreka je naslednji izrek:

Izrek (Dirac)

Naj bo G graf z vsaj tremi točkami ($|V(G)| = n \geq 3$).

Če za vsako točko

$$v \in V(G) \text{ velja } \deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

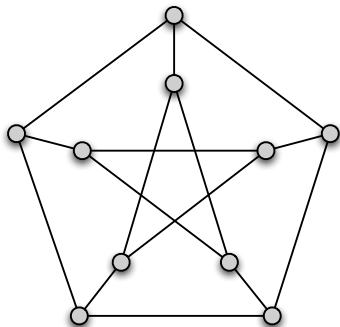
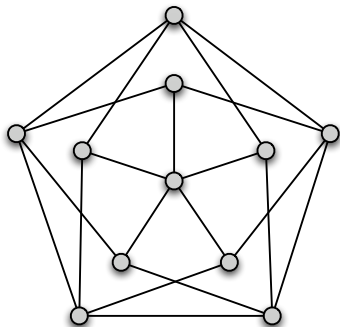
potem je graf G Hamiltonov.

Dokaz.

Poljubni nesosednji točki u, v iz G zadoščata pogoju $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Zaporedoma dodajamo povezave med nesosednjimi točkami. Zaporedje dobljenih grafov po zgornjem izreku zadošča pogoju, da so vsi Hamiltonovi ali pa noben ni tak. Ker je zadnji graf v zaporedju poln graf K_n , ki je očitno Hamiltonov, so vsi grafi Hamiltonovi. □

Komentar: Zadnja dva pogoja sta zadostna za obstoj Hamiltonovega cikla. To pomeni, da je vsak graf, ki izpolni pogoje izrekov, Hamiltonov. Ni pa res, da bi vsak Hamiltonov graf moral izpolniti katerega od zgornjih pogojev.

Ali je kateri od naslednjih grafov, tj. levi Grötzschev, desni Petersenov, Hamiltonov?



Izkaže se, da levi je Hamiltonov, desni pa ne. Poučno je, da to poskusite sami utemeljiti. Svoje razmišljanje lahko preverite tu

<https://www.youtube.com/watch?v=hGdyxo0028w>.