

DS 11. teden

* NAJVEČJI SKUPNI DEJITELJ:

$$\gcd(a, b) = \max \{ d \in \mathbb{Z} : d|a \wedge d|b \}$$

* NAJMANJŠI SKUPNI VEČKRATNIK:

$$\text{lcm}(a, b) = \min \{ v \in \mathbb{Z} : a|v \wedge b|v \}$$

* TUJI ŠTEVILI: a in b sta tuji, če $\gcd(a, b) = 1$.

* REA - RAZŠIRJEN EVKLIDOV ALGORITEM - poda $\gcd(a, b)$, kot tudi števili s in t ,

da velja

$$s \cdot a + t \cdot b = \gcd(a, b)$$

* LDE - LINEARNA DIOFANTSKA ENAČBA:

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ znano

x, y iščeno

└→ rešljiva, natanke tedaj, ko $\gcd(a, b) | c$

1. REA za $\gcd(a, b)$

a) $\gcd(2016, 828) = ?$

$$\begin{aligned} & \text{I} \\ & \text{II} \\ & \text{III} = \text{I} - 2\text{II} \\ & \text{IV} = \text{II} - 2\text{III} \\ & \text{V} = \text{III} - 3\text{IV} \\ & \text{VI} = \text{IV} - 3\text{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2016 + 0 \cdot 828 = 2016 \\ & 0 \cdot 2016 + 1 \cdot 828 = 828 \\ & 1 \cdot 2016 + (-2) \cdot 828 = 360 \\ & -2 \cdot 2016 + 5 \cdot 828 = 108 \\ & 7 \cdot 2016 + (-17) \cdot 828 = \boxed{36} \\ & -23 \cdot 2016 + 56 \cdot 828 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2016 &= 2 \cdot 828 + 360 \\ 828 &= 2 \cdot 360 + 108 \\ 360 &= 3 \cdot 108 + 36 \\ 108 &= 3 \cdot 36 + 0 \end{aligned}$$

$\gcd(2016, 828) = 36$

b) $\gcd(34, 21) = ?$

$$\begin{aligned} & \text{I} \\ & \text{II} \\ & \text{III} = \text{I} - \text{II} \\ & \text{IV} = \text{II} - \text{III} \\ & \text{V} = \text{III} - \text{IV} \\ & \text{VI} = \text{IV} - \text{V} \\ & \text{VII} = \text{V} - \text{VI} \\ & \text{VIII} = \text{VI} - \text{VII} \\ & \text{IX} = \text{VII} - 2 \cdot \text{VIII} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 34 + 0 \cdot 21 = 34 \\ & 0 \cdot 34 + 1 \cdot 21 = 21 \\ & 1 \cdot 34 + (-1) \cdot 21 = 13 \\ & -1 \cdot 34 + 2 \cdot 21 = 8 \\ & 2 \cdot 34 + (-3) \cdot 21 = 5 \\ & -3 \cdot 34 + 5 \cdot 21 = 3 \\ & 5 \cdot 34 + (-8) \cdot 21 = 2 \\ & -8 \cdot 34 + 13 \cdot 21 = \boxed{1} \\ & 21 \cdot 34 + (-34) \cdot 21 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 34 &= 1 \cdot 21 + 13 \\ 21 &= 1 \cdot 13 + 8 \\ 13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

$\gcd(34, 21) = 1$, tuji števili

$$c) \gcd(611, 559)$$

I	$1 \cdot 611 + 0 \cdot 559 = 611$	
II	$0 \cdot 611 + 1 \cdot 559 = 559$	$611 = 1 \cdot 559 + 52$
III = I - II	$1 \cdot 611 + (-1) \cdot 559 = 52$	$559 = 10 \cdot 52 + 39$
IV = II - 10 \cdot III	$-10 \cdot 611 + 11 \cdot 559 = 39$	$52 = 1 \cdot 39 + 13$
V = III - IV	$11 \cdot 611 + (-12) \cdot 559 = 13$	$39 = 3 \cdot 13 + 0$
VI = IV - 3 \cdot V	$-43 \cdot 611 + 47 \cdot 559 = 0$	

② LDE

$$a) 48x + 18y = 36$$

$$\gcd(48, 18) = ?$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 48 + 0 \cdot 18 &= 48 \\ 0 \cdot 48 + 1 \cdot 18 &= 18 \\ 1 \cdot 48 + (-2) \cdot 18 &= 12 \\ (-1) \cdot 48 + 3 \cdot 18 &= \underline{6} \\ 3 \cdot 48 + (-8) \cdot 18 &= 0 \end{aligned}$$

$$\gcd(48, 18) = 6 \text{ in } 6 | 36 \Rightarrow \text{rešljiva LDE}$$

$$-1 \cdot 48 + 3 \cdot 18 = 6 \quad / \cdot 6$$

$$\underline{-6} \cdot 48 + \underline{18} \cdot 18 = 36$$

$$\text{OSNOVNA REŠITEV: } (x_0, y_0) = (-6, 18)$$

SPLOŠNA REŠITEV: $36 = 36 + t \cdot 0$

$$36 = -6 \cdot 48 + 18 \cdot 18 + t \cdot (3 \cdot 48 + (-8) \cdot 18)$$

$$36 = \underline{-6 + 3t} \cdot 48 + \underline{18 - 8t} \cdot 18$$

$$(x_t, y_t) = (-6 + 3t, 18 - 8t), t \in \mathbb{Z}$$

b) $48x + 18y = 40$

$\gcd(48, 18) = 6$ in $6 \nmid 40 \Rightarrow$ LDE ni rešljiva!

3. x - št. moških v družbi
y - št. žensk v družbi

$$25x + 15y = 300$$

$x, y \in \mathbb{N} \text{ ?!}$

a) $\gcd(25, 15) = ?$

$$1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 25$$

$$0 \cdot 25 + 1 \cdot 15 = 15$$

$$1 \cdot 25 + (-1) \cdot 15 = 10$$

$$-1 \cdot 25 + 2 \cdot 15 = 5$$

$$3 \cdot 25 + (-5) \cdot 15 = 0$$

$\gcd(25, 15) = 5$ in $5 \mid 300 \Rightarrow$ LDE rešljiva!

$$-1 \cdot 25 + 2 \cdot 15 = 5 \quad / \cdot 60$$

$$-60 \cdot 25 + 120 \cdot 15 = 300$$

OSNOVNA REŠ: $(x_0, y_0) = (-60, 120)$

SPLOŠNA RES: $300 = 300 + t \cdot 0$

$$300 = -60 \cdot 25 + 120 \cdot 15 + t(3 \cdot 25 + (-5) \cdot 15)$$

$$300 = (-60 + 3t) \cdot 25 + (120 - 5t) \cdot 15$$

$$(x_t, y_t) = (-60 + 3t, 120 - 5t) \quad t \in \mathbb{Z}$$

POGOJA: $x_t \geq 0$

$$-60 + 3t \geq 0$$

$$3t \geq 60$$

$$t \geq 20$$

$\wedge$

$$y_t \geq 0$$

$$120 - 5t \geq 0$$

$$5t \leq 120$$

$$t \leq 24$$

$$\Rightarrow t = 20, \dots, 24 \Rightarrow$$

M $\checkmark$ Z

$$(0, 20)$$

$$(3, 15)$$

$$(6, 10)$$

$$(9, 5)$$

$$(12, 0)$$

b) NAJVEČ 20 LJUDI (20 ŽENSK).

h. $20c, 50c, \text{ knjiga stane } 14,30\text{€} = 1430c$

x - št. kovancev za 20c

y - št. kovancev za 50c

$$20 \cdot x + 50 \cdot y = 1430$$

$$\gcd(20, 50) = ?$$

$$0 \cdot 20 + 1 \cdot 50 = 50$$

$$1 \cdot 20 + 0 \cdot 50 = 20$$

$$-2 \cdot 20 + 1 \cdot 50 = 10$$

$$5 \cdot 20 + (-2) \cdot 50 = 0$$

$$\gcd(20, 50) = 10$$

$$\text{in } 10 \mid 1430$$

$\Rightarrow$ KDE
rešljiva

$$-2 \cdot 20 + 1 \cdot 50 = 10 \quad / \cdot 143$$

$$-286 \cdot 20 + 143 \cdot 50 = 1430$$

$$\text{OSNOVNA REŠ: } (x_0, y_0) = (-286, 143)$$

$$\text{POGOJA: } x_t \geq 0$$

$$-286 + 5t \geq 0$$

$$5t \geq 286$$

$$t \geq 57.2$$

$$\wedge y_t \geq 0$$

$$143 - 2t \geq 0$$

$$2t \leq 143$$

$$t \leq 71.5$$

$$\Rightarrow t = 58, 59, \dots, 71$$

14 RAZLIČNIH NAĐNOV.

$$\text{SPLOŠNA REŠ: } 1430 = 1430 + t \cdot 0$$

$$1430 = -286 \cdot 20 + 143 \cdot 50 + t \cdot (5 \cdot 20 - 2 \cdot 50)$$

$$1430 = (-286 + 5t) \cdot 20 + (143 - 2t) \cdot 50$$

$$(x_t, y_t) = (-286 + 5t, 143 - 2t) \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{5} \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{29}{5} \quad / \cdot 5$$

$$3x + 5y = 29$$

$$\gcd(3, 5) = ?$$

$$0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 5$$

$$1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 3$$

$$-1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 2$$

$$2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = \textcircled{1}$$

$$-5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 0$$

$$\gcd(3, 5) = 1 \quad \wedge \quad 1 \mid 29 \quad \Rightarrow \text{LDE resljiva}$$

$$2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 1 \quad / \cdot 29$$

$$58 \cdot 3 + (-29) \cdot 5 = 29$$

$$\text{OSNOVNA REŠ: } (x_0, y_0) = (58, -29)$$

SPLOŠNA RES: $29 = 29 + t \cdot 0$

$$29 = 58 \cdot 3 + (-29) \cdot 5 + t \cdot (-5 \cdot 3 + 3 \cdot 5)$$

$$29 = (58 - 5t) \cdot 3 + (-29 + 3t) \cdot 5$$

$$(x_t, y_t) = (58 - 5t, -29 + 3t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

POGOTOJ A: $x_t \geq 0 \quad \wedge \quad y_t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t = 10, 11$

$$58 - 5t \geq 0$$

$$5t \leq 58$$

$$t \leq 11.6$$

$$-29 + 3t \geq 0$$

$$3t \geq 29$$

$$t \geq 9.67$$

$$\left. \begin{array}{l} (x_{10}, y_{10}) = (8, 1) \\ (x_{11}, y_{11}) = (3, 4) \end{array} \right\} \text{ DVE TOČKI}$$

6. DVOMESTNA NARAVNA ŠTEVILA: (xy) $0 < x < 10 \quad \wedge \quad 0 \leq y < 10$

$$xy + x + y = 62$$

$$10x + y + x + y = 62$$

$$\boxed{11x + 2y = 62}$$

$$\gcd(11, 2) = ?$$

$$1 \cdot 11 + 0 \cdot 2 = 11$$

$$0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$1 \cdot 11 + (-5) \cdot 2 = 1$$

$$-2 \cdot 11 + 11 \cdot 2 = 0$$

$$xy = 10 \cdot x + y$$

(npr. $57 = 10 \cdot 5 + 7$)

$$\gcd(11, 2) = 1 \quad \text{in} \quad 1 \mid 62$$

$\Rightarrow$ IDE rešjiva

$$1 \cdot 11 + (-5) \cdot 2 = 1 \quad / \cdot 62$$

$$62 \cdot 11 + (-310) \cdot 2 = 62$$

$$\text{OSNOVNA REŠ: } (x_0, y_0) = (62, -310)$$

$$\text{SPLOŠNA REŠ: } 62 = 62 + t \cdot 0$$

$$62 = 62 \cdot 11 + (-310) \cdot 2 + t \cdot (-2 \cdot 11 + 11 \cdot 2)$$

$$62 = (62 - 2t) \cdot 11 + (-310 + 11t) \cdot 2$$

$$(x_t, y_t) = (62 - 2t, -310 + 11t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{POGOTOJI: } 0 < x_t < 10$$

 $\wedge$

$$0 \leq y_t < 10$$

$$62 - 2t > 0$$

$$62 - 2t < 10$$

$$2t < 62$$

$$t < 31$$

 $\wedge$

$$-2t < -52$$

$$t > 26$$

 $\wedge$

$$-310 + 11t \geq 0$$

$$11t \geq 310$$

$$t \geq 28.18$$

 $\wedge$

$$-310 + 11t < 10$$

$$11t < 320$$

$$t < 29.1$$

 $\Rightarrow$

$$t = 29$$

$$(x_{29}, y_{29}) = (4, 9) \Rightarrow 49$$