Tutorstvo - fizika, FRI

8. teden: Nihanje

1. Enačbe nihanja

Nihajni čas nihala je 2 s. V nekem trenutku znaša odmik nihala 3 cm, njegova hitrost, ki j eusmerjena proti ravnovesni legi, pa 10 cm/s. Kolikšen bo odmik nihala čez 1.2 s? Kolikšna je amplituda nihanja?

Rešitev:

Nihanje opišemo z enačbo $x = x_0 \sin(\omega t + \delta)$. Če to enačbo odvajamo, dobimo izraz za hitrost: $\dot{(x)} = v = x_0 \omega \cos(\omega t + \delta)$. V našem primeru si lahko izberemo, da je čas ob trenutku, za katerega poznamo naše količine, enak 0. Tedaj se enačbi glasita:

$$x(t=0) = x_0 \sin\delta$$
$$v(t=0) = x_0 \omega \cos\delta$$

Dobili smo sistem dveh enačb za neznanki x_0 in δ. Rešimo ga tako, da enačbi delimo, da dobimo izraz za fazni zamik:

$$\frac{x(t=0)}{v(t=0)} = \frac{1}{\omega}\tan\delta$$
$$\delta = \arctan(\omega \frac{x(t=0)}{v(t=0)})$$

Ta izraz vstavimo nazaj v prvo enačbo in izrazimo amplitudo nihanja x_0:

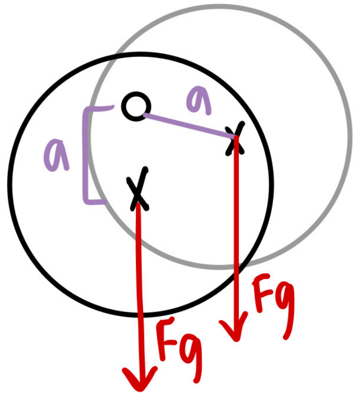
$$x_0 = \frac{x}{\sin\delta} = \frac{x(t=0)}{\sin(\mathrm{arctg}(\omega \frac{x(t=0)}{v(t=0)}))} = -4.37 \text{ cm}$$

Pri tem izračunu smo upoštevali, da je $\omega = 2\pi/t_0$, negativen predznak pa smo dobili zaradi negativne hitrosti (ker kaže proti ravnovesni legi). Sedaj, ko poznamo vse koeficiente, ki nam nastopajo v naši enačbi nihanja, lahko preprosto izračunamo odmik ali hitrost ob vseh kasnejših časih:

$$x(t_1) = x_0 \sin(\omega t_1 + \delta) = -0.57 \text{ cm}$$

2. Nihajoč valj

Homogen valj s premerom 1 m niha okoli osi, ki gre skozi valj, vzporedno z njegovo osjo. Kolikšna naj bo razdalja osi od geometrijske, da bo nihajni čas najmanjši? Kolikšen je ta nihajni čas?



Rešitev:

Ko valj niha okoli takšne osi, se v bistvu vrti okoli osi, ki mu ni lastna. Zato bomo upoštevali, da je vztrajnostni moment za takšen valj po Steinerjevem izreku enak

$$J = J* + ma^2 = 1/2mR^2 + ma^2$$

Newtonov zakon za vrtenje se glasi:

$$J\alpha = J\ddot{\varphi} = M_g = -mga\sin\varphi \approx -mga\varphi$$

V računu smo privzeli, da so koti nihanja majhni in je zato $\sin\varphi \approx \varphi$. Iz enačbe razberemo, da je torej frekvenca nihanja enaka

$$\omega^2 = \frac{mga}{J} = \frac{mga}{1/2mR^2 + ma^2} = \frac{ga}{1/2R^2 + a^2}$$

Če nas zanima, za kateri a bo frekvenca nihanja najmanjša, jo odvajamo po a. Ker bo za minimalen ω tudi ω^2 minimalen, bomo odvajali izraz za slednjega, saj se želimo izogniti odvajanju korenov. Sledi:

$$\frac{d\omega^2}{da} = \frac{g}{1/2R^2 + a^2} - \frac{ga \cdot 2a}{(1/2R^2 + a^2)^2} = 0$$
$$\frac{g}{1/2R^2 + a^2} = \frac{ga \cdot 2a}{(1/2R^2 + a^2)^2}$$
$$2a^2 = 1/2R^2 + a^2$$
$$a = \sqrt{1/2}R = 0.35 \text{ m}$$

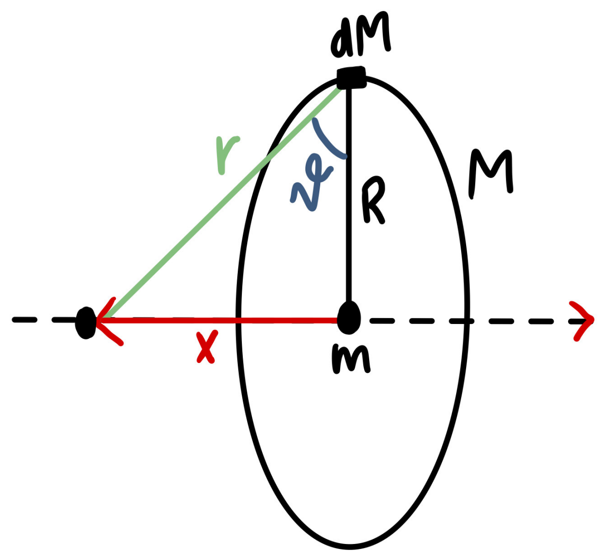
Da izračunamo še nihajni čas za takšno oddaljenost osi od težišča, vstavimo naš rezultat v enačbo za ω in upoštevamo, da je $\omega = 2\pi/t_0$. Dobimo, da je nihajni čas enak $t_0 = 1.69$ s.

3. Vesoljska postaja v obliki obroča.

V vesolju imamo homogeno vesoljsko postajo v obliki tankega obroča z maso M in radijem R. Na sredini na začetku miruje astronavt z maso m. Astonavta nato izmaknemo iz središča obroča v smeri geometrijske osi. S kolikšno frekvenco bo nihal astronavt?

Rešitev:

Da bomo lahko izračunali frekvenco nihanja, moramo najprej izračunati silo, ki deluje na stronavta. V središču obroča bo astronavt na začetku miroval, saj je vsota gravitacijskih sil vseh delov obroča enaka 0. Narišimo si skico, ko je astronavt v odmiku:



Od vsakega delčka obroča bomo upoštevali le x-komponento sile, saj se bodo y-komponente med sabo odštele. X-komponenta sile je enaka $F_x = F{\cdot}\sin\vartheta$. Majhen delček obroča deluje na astronavta z majhno silo:

$$dF = G\frac{mdM}{r^2} \cdot \sin\vartheta$$

Ker za vsak delček obroča ta sila enaka (saj so vsi deli obroča na enaki razdalji r od astronavta), so vse količine razen dM konstantne pri integraciji. Integracija po celotnem obroču nam prinese kar celotno maso M, zato se sila na astronavta v točki x glasi:

$$F = G\frac{mM}{r^2} \cdot \sin\vartheta$$

Namesto $\sin\vartheta$ lahko pišemo x/r:

$$F = G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = G\frac{mMx}{r^3}$$

Razdaljo r lahko s pomočjo pitagorovega izreka izrazimo kot:

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} = R\sqrt{1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2}$$

Ker obravnavamo majhne odmike x je x << R, zato je ulomek x/R zelo majhen (kvadrat ulomka pa še toliko manjši) in ga lahko zanemarimo. Ugotovimo, da je $r \approx R$. Naša poenostavljena enačba za silo se torej glasi:

$$F = G\frac{mMx}{R^3}$$

Sedaj zapišemo 2. Newtonov zakon:

$$m\ddot{x} = -G\frac{mM}{R^3}x$$

Sedaj brez težav prepoznamo, da je frekvenca nihanja enaka

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}$$