

Diskretne strukture

Šesti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

12. november 2021

Vsebovanost elementa x v množici A podamo z *relacijo pripadnosti*.

Pišemo: $x \in A$. Beremo: x *pripada* A .

Množice lahko podamo na naslednja načina:

- z *naštevanjem elementov*: $A = \{0, 1, 2\}$
- z neko *izjavno formulo*: $A = \{x ; \varphi(x)\}$
Velja: $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x) = 1$.

Primer

Zgledi množic so:

$$\begin{aligned} A &= \{x ; x \neq x\} = \emptyset && \text{prazna množica,} \\ B &= \{x ; x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2\} = \{0, 1, 2\}, \\ C &= \{x ; x^2 + 1 \geq 5\}. \end{aligned}$$

Pozor - Russellov paradoks: Vsaka izjavna formula ni dobra!

$$R = \{x ; x \notin x\}$$

Ali velja $R \in R$? $R \in R$ natanko tedaj, ko $R \notin R$.

- Množici A in B sta *enaki*,

$$A = B \iff \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Pravimo, da je A v relaciji *enakosti* z B .

- Množica A je *podmnožica* množice B ,

$$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Pravimo, da je A v relaciji *inkluzije* z B .

- Množica A je *prava podmnožica* množice B ,

$$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Pravimo, da je A v relaciji *stroge inkluzije* z B .

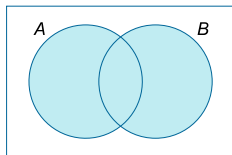
Trditev

Za poljubne množice A , B in C velja

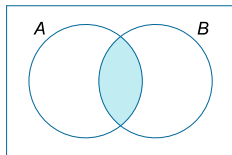
- $\emptyset \subseteq A$ in $A \subseteq A$.
- $A \subseteq A$.
- $A = B$ natanko tedaj, ko je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$.
- Če $A \subseteq B$ in $B \subseteq C$, potem $A \subseteq C$.

Osnovne operacije z množicami so:

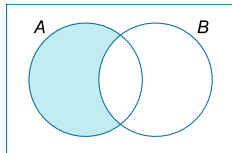
- *unija* $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$



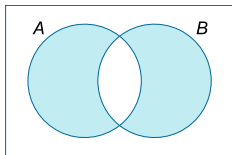
- *presek* $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$



- *razlika* $A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$



- *simetrična razlika* $A + B = \{x ; x \in A \vee x \in B\}$



Lastnosti osnovnih operacij pa so:

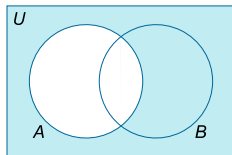
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*, če je $A \cap B = \emptyset$.

Univerzalna množica, označimo jo z S , ustreza področju pogovora v predikatnem računu.

Vse obravnavane množice so vsebovane v univerzalni množici S .

Komplement množice A definiramo kot $A^c = S \setminus A$.



Komplementiranje ima naslednje lastnosti:

- $(A^c)^c = A$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Dokaz. Veljajo naslednje ekvivalence:

- $x \in (A \cup B)^c$ natanko tedaj, ko $x \in S \setminus (A \cup B)$... (definicija c).
- $x \in S \setminus (A \cup B)$ ntk $x \in S$ in $x \notin A \cup B$ (def $\setminus$)
- $x \in S$ in $x \notin A \cup B$ ntk $x \in S$ in $x \notin A$ in $x \notin B$ (def $\cup$)
- $x \in S$ in $x \notin A$ in $x \notin B$ ntk $x \in S \setminus A = A^c$ in $x \in S \setminus B = B^c$ (def c)
- $x \in A^c$ in $x \in B^c$ ntk $x \in A^c \cap B^c$ (def $\cap$)

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- $A \setminus B = A \cap B^c$

Dokaz. Veljajo naslednje ekvivalence:

$$(x \in A \setminus B) \text{ ntk } (x \in A \text{ in } x \notin B) \text{ ntk } (x \in A \text{ in } x \in B^c) \text{ ntk } x \in A \cap B^c.$$

- $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

- $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$

Po prednosti je komplement c močnejši od preseka $\cap$ in razlike $\setminus$, ti dve pa močnejši od unije $\cup$ in simetrične razlike $+$:

c	$\cap \setminus$	$\cup +$
------	------------------	----------

Na naslednjih dveh straneh bomo videli osnovne enakosti z množicami, ki jih operacije z množicami "*podedujejo*" iz ustreznih lastnosti izjavnih veznikov.

Absorpcija

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Dokaz drugega dela absorpcije. Vzemimo poljuben element x iz $A \cap (A \cup B)$. Od tod sledi $x \in A$ in $x \in (A \cup B)$. Posebej torej $x \in A$, iz česar sledi vsebovanost $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.

Vzemimo poljuben element x iz A . Sledi $x \in A \cup B$ in zato $x \in A \cap (A \cup B)$. Torej imamo tudi vsebovanost $A \subseteq A \cap (A \cup B)$.

Iz obeh vsebovanosti sledi enakost $A \cap (A \cup B) = A$.

Distributivnost

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

Dokaz prvega dela distributivnosti. Vzemimo poljuben element x iz $A \cap (B \cup C)$. Od tod sledi $x \in A$ in $x \in (B \cup C)$. Sledi $x \in B$ ali $x \in C$. V prvem primeru imamo $x \in A \cap B$, v drugem pa $x \in A \cap C$. Sklepamo, da $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, iz česar sledi vsebovanost $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Vzemimo poljuben element x iz $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Sledi $x \in A \cap B$ ali $x \in A \cap C$. V prvem primeru sledi $x \in A$ in $x \in B$, v drugem pa $x \in A$ in $x \in C$. V obeh primerih torej $x \in A$ in $x \in B \cup C$. Sklepamo, da $x \in A \cap (B \cup C)$, iz česar sledi vsebovanost $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Iz obeh vsebovanosti sledi enakost $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

de Morganova zakona

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Zakon dvojnega komplementa

$$(A^c)^c = A$$

Idempotenca

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

Komutativnost

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A + B = B + A$$

Asociativnost

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Kontrapozicija

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

$\emptyset$ in S

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap S = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup S = S$$

Lastnosti simetrične razlike

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Potenčna množica množice A , $\mathcal{P}A$, je množica vseh podmnožic množice A . S simboli:

$$\mathcal{P}A = \{B ; B \subseteq A\}$$

Opomba. Tako $\emptyset$ kot A pripadata potenčni množici $\mathcal{P}A$.

Primer

- $\mathcal{P}\{1, 2, 3\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$
- $\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P}\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Trditev

Če množica A vsebuje natanko n elementov in je n naravno število, potem $\mathcal{P}A$ vsebuje natanko 2^n elementov.

Dokaz. Vsak element iz A bodisi je element podmnožice bodisi ni element podmnožice. Torej imamo za vsak element 2 možnosti. Skupaj imamo tako 2^n različnih možnosti. Vsaka od možnosti ustreza neki podmnožici množice A .

Trditev

Iz vsebovanosti $A \subseteq B$, sledi vsebovanost $\mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}B$.

Urejeni par s prvo komponento (koordinato) a in drugo komponento (koordinato) b označimo z (a, b) .

Trditev (osnovna lastnost urejenih parov)

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ in } b = d$$

Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov. S simboli:

$$A \times B = \{(a, b) ; a \in A \wedge b \in B\}.$$

Definicijo kartezičnega produkta lahko razširimo na več faktorjev.

$A \times B \times C$ je množica vseh urejenih trojic s prvo koordinato v A , drugo v B in tretjo koordinato v množici C .

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je *urejena n -terica*. $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ je množica vseh urejenih n -teric s prvo koordinato v A_1 , drugo v A_2 , ... in zadnjo v A_n .

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Dokaz. Naj bo (x, y) poljuben element iz $A \times (B \cup C)$. Torej je $x \in A$ in $y \in B \cup C$. Sledi $y \in B$ ali $y \in C$. V prvem primeru je $(x, y) \in A \times B$, v drugem pa $(x, y) \in A \times C$. V obeh primerih pa je $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Sklepamo na vsebovanost $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Naj bo (x, y) poljuben element iz $(A \times B) \cup (A \times C)$. Torej je $(x, y) \in A \times B$ in $(x, y) \in A \times C$. V prvem primeru je $x \in A$ in $y \in B$, v drugem pa je $x \in A$ in $y \in C$. V obeh primerih pa je $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Sklepamo na vsebovanost $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Sledi, da velja $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Dokaz. Velja $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq A \times (C \cap D) \subseteq A \times C$. Podobno $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq B \times D$. Sledi $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$.

Vzemimo poljuben $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$. Sledi $(x, y) \in A \times C$ in $(x, y) \in B \times D$. Velja $x \in A$, $y \in C$ in $x \in B$, $y \in D$. Torej je $x \in A \cap B$ in $y \in C \cap D$. Sklepamo $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ in zato $(A \times C) \cap (B \times D) \subseteq (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Obe vsebovanosti implicirata enakost $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

- $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$

- $A \times B \subseteq C \times D \wedge A \times B \neq \emptyset \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq D$
- A končna z m elementi in B končna z n elementi $\implies A \times B$ končna z $m \cdot n$ elementi.

Če v tretjo lastnost vstavimo $C = D$, pridelamo

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Podobno, če vstavimo $A = B$.

Toda v splošnem

$$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D).$$

Protiprimer. $A = C = [0, 1]$, $B = D = [1, 2]$. Velja

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = [0, 2] \times [0, 2],$$

toda

$$(A \times C) \cup (B \times D) = [0, 1] \times [0, 1] \cup [1, 2] \times [1, 2].$$