

1. Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$ razpet na vektorje

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Poišči bazi za podprostora V in $V^\perp$.
- (b) Poišči ortonormirani bazi za podprostora V in $V^\perp$.
- (c) Poišči pravokotni projekciji vektorja $[1, 2, 3, 4]^\top$ na V in $V^\perp$.

Rešitev: (a) $B_V = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $B_{V^\perp} = \{[1, 0, 0, -1]^\top, [0, 1, -1, 0]^\top\}$.

(b) $B'_V = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{y} \right\}$, $B'_{V^\perp} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 0, -1]^\top, \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, -1, 0]^\top \right\}$.

(c) Pravokotna projekcija na V je $\frac{5}{2}[1, 1, 1, 1]^\top$, pravokotna projekcija na $V^\perp$ je $\frac{1}{2}[-3, -1, 1, 3]^\top$.

2. Vektorski podprostor $U \leq \mathbb{R}^4$ razpenjajo vektorji

$$\mathbf{a}_1 = [1, 1, 1, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1, 0, 2, 1]^\top \quad \text{in} \quad \mathbf{a}_3 = [1, -1, 1, 1]^\top.$$

- (a) Poišči ortonormirano bazo podprostora U .
- (b) Izrazi vektorje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$ v tej bazi.
- (c) Dopolni to bazo do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^4$.
- (d) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{v} = [1, 1, 1, 5]^\top$ na podprostor U .

Rešitev: (a) $B_U = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\} = \left\{ \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^\top, \frac{1}{\sqrt{2}}[0, -1, 1, 0]^\top, \frac{1}{2}[1, -1, -1, 1]^\top \right\}$.

(b) $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{q}_1$, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$.

(c) B_U dodamo $\mathbf{q}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 0, 0, 1]^\top$.

(d) Pravokotna projekcija $\mathbf{v}$ na U je $[3, 1, 1, 3]^\top$.

3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Poišči podprostor V vseh vektorjev $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, ki so pravokotni na $C(A)$. Poišči bazo za V in določi njegovo dimenzijo.
- (b) Poišči podprostor U vseh vektorjev $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, ki so pravokotni na $C(A^\top)$. Poišči bazo za U in določi njegovo dimenzijo.

Rešitev: (a) $V = C(A)^\perp = N(A^\top)$, zato $B_V = \{[4, 3, -2]^\top\}$ in $\dim V = 1$.

(b) $U = C(A^\top)^\perp = N(A)$, zato $B_U = \{[-1, 0, 1]^\top\}$ in $\dim U = 1$.