Linearna algebra
Vaje 9

1. Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$ razpet na vektorje

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(a) Poišči bazi za podprostora V in $V^\perp$.

$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pa sta linearno neodvisna $\Rightarrow \mathcal{B}_V = \{\vec{x}, \vec{y}\}$

Ker je $\dim V = 2$ in $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, bo $\dim V^\perp = 2$ in iščemo še 2 lin. neodvisna vektorja, ki sta pravokotna na $\vec{x}$ in $\vec{y}$.

Uganemo: $\vec{u} = [1,0,0,-1]^T$, $\vec{v} = [0,1,-1,0]^T$. Baza za $V^\perp$ je $\mathcal{B}_{V^\perp} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

(b) Poišči ortonormirani bazi za podprostora V in $V^\perp$.

$\vec{x} \perp \vec{y}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$, moramo samo še normirati.

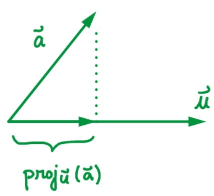
$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$, enako $\|\vec{y}\| = \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{x}$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{y}$, $\vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}$, $\vec{q}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}$

$\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ je ONB za V, $\{\vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ je ONB za $V^\perp$.

(c) Poišči pravokotni projekciji vektorja $[1,2,3,4]^T$ na V in $V^\perp$.

$\operatorname{proj}_{\vec{u}}(\vec{a}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \cdot \vec{u}$



$\|\vec{u}\| = 1 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} = 1 \Rightarrow$

$\operatorname{proj}_{\vec{u}}(\vec{a}) = (\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{u}$

$\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n\}$ ONB za $V \Rightarrow$

$\operatorname{proj}_V(\vec{a}) = (\vec{q}_1\vec{a})\vec{q}_1 + \dots + (\vec{q}_n\vec{a})\vec{q}_n$

$$\vec{a}\cdot\vec{q}_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \qquad \vec{a}\cdot\vec{q}_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{q}_3 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \vec{a}\cdot\vec{q}_4 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{proj}_V(\vec a) = \frac{5}{\sqrt2}\vec q_1 + \frac{5}{\sqrt2}\vec q_2 = \frac{5}{\sqrt2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix} + \frac{5}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac52\\0\\0\\\frac52\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\frac52\\\frac52\\0\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}\frac52\\\frac52\\\frac52\\\frac52\end{bmatrix}}}$$

$$\mathrm{proj}_{V^\perp}(\vec a) = \frac{-3}{\sqrt2}\vec q_3 + \frac{-1}{\sqrt2}\vec q_4 = \begin{bmatrix}-\frac32\\0\\0\\\frac32\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-\frac12\\\frac12\\0\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}-\frac32\\-\frac12\\\frac12\\\frac32\end{bmatrix}}}$$

Preverimo:

$\mathrm{proj}_V(\vec a) + \mathrm{proj}_{V^\perp}(\vec a) = \vec a$ ✓

2. Vektorski podprostor $U \leq \mathbb{R}^4$ razpenjajo vektorji

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,1,1]^\mathsf{T}, \quad \mathbf{a}_2 = [1,0,2,1]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \mathbf{a}_3 = [1,-1,1,1]^\mathsf{T}.$$

(a) Poišči ortonormirano bazo podprostora U.

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

input: $\vec v_1, \dots, \vec v_k \in \mathbb{R}^n$ linearno neodvisni

output: $\vec u_1, \dots, \vec u_k \in \mathbb{R}^n$ paroma ortogonalni in $\mathrm{Lin}\{\vec u_1, \dots, \vec u_n\} = \mathrm{Lin}\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$

$$\vec u_1 = \vec v_1$$

$$\vec u_2 = \vec v_2 - \frac{\vec v_2 \cdot \vec u_1}{\vec u_1 \cdot \vec u_1}\vec u_1$$

$$\vec u_3 = \vec v_3 - \frac{\vec v_3 \cdot \vec u_1}{\vec u_1 \cdot \vec u_1}\vec u_1 - \frac{\vec v_3 \cdot \vec u_2}{\vec u_2 \cdot \vec u_2}\vec u_2$$

$$\vdots$$

Pred G-S ni potrebno preverjati linearne neodvisnosti. Če je kak vektor linearno odvisen od ostalih, bo med postopkom avtomatično izpadel.

$$\vec u_1 = \vec a_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \|\vec u_1\| = \sqrt4 = 2$$

$$\vec u_2 = \vec a_2 - \frac{\vec a_2 \cdot \vec u_1}{\vec u_1 \cdot \vec u_1}\cdot \vec u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix} - \frac44 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \|\vec u_2\| = \sqrt2$$

$$\vec u_3 = \vec a_3 - \frac{\vec a_3 \cdot \vec u_1}{\vec u_1 \cdot \vec u_1}\vec u_1 - \frac{\vec a_3 \cdot \vec u_2}{\vec u_2 \cdot \vec u_2}\vec u_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac24\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac22\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{bmatrix} \qquad \|\vec u_3\| = \sqrt{\tfrac14+\tfrac14+\tfrac14+\tfrac14} = 1$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{q}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} \qquad \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\} \text{ je ONB za } U.$$

(b) Izrazi vektorje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$ v tej bazi.

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_1\cdot\vec{q}_1 &= \tfrac{1}{2}\cdot 4 = 2 \\ \vec{a}_1\cdot\vec{q}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 = 0 \\ \vec{a}_1\cdot\vec{q}_3 &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}_1 = 2\vec{q}_1 + 0\cdot\vec{q}_2 + 0\cdot\vec{q}_3$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_2\cdot\vec{q}_1 &= \tfrac{1}{2}\cdot 4 = 2 \\ \vec{a}_2\cdot\vec{q}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 = \sqrt{2} \\ \vec{a}_2\cdot\vec{q}_3 &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}_2 = 2\vec{q}_1 + \sqrt{2}\,\vec{q}_2$$

Koeficienti razvoja po ONB so skalarni produkti.

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_3\cdot\vec{q}_1 &= \tfrac{1}{2}\cdot 2 = 1 \\ \vec{a}_3\cdot\vec{q}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 = \sqrt{2} \\ \vec{a}_3\cdot\vec{q}_3 &= \tfrac{1}{2}\cdot 2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}_3 = \vec{q}_1 + \sqrt{2}\,\vec{q}_2 + \vec{q}_3$$

(c) Dopolni to bazo do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^4$.

$\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ vsebuje 3 linearno neodvisne paroma pravokotne vektorje. Do ONB za $\mathbb{R}^4$ manjka še eden.

Uganemo: $\vec{q}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$. Če ne znamo uganiti, poiščemo vektor $\vec{a}_4$, ki je linearno neodvisen od $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$ in naredimo še en korak G-S postopka.

(d) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{v} = [1, 1, 1, 5]^\mathsf{T}$ na podprostor U.

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}\cdot\vec{q}_1 &= \tfrac{1}{2}\cdot 8 = 4 \\ \vec{v}\cdot\vec{q}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 = 0 \\ \vec{v}\cdot\vec{q}_3 &= \tfrac{1}{2}\cdot 4 = 2 \end{aligned}\right\} \quad \operatorname{proj}_U(\vec{v}) = (\vec{v}\vec{q}_1)\vec{q}_1 + (\vec{v}\vec{q}_2)\vec{q}_2 + (\vec{v}\vec{q}_3)\vec{q}_3 = 4\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}3\\1\\1\\3\end{bmatrix}}}$$

2. način

$$\vec{v}\cdot\vec{q}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 4 = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{proj}_{U^\perp}(\vec{v}) = (\vec{v}\vec{q}_4)\,\vec{q}_4 = \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{proj}_U(\vec{v}) = \vec{v} - \operatorname{proj}_{U^\perp}(\vec{v}) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\2\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}3\\1\\1\\3\end{bmatrix}}}$$

3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči podprostor V vseh vektorjev $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, ki so pravokotni na $C(A)$. Poišči bazo za V in določi njegovo dimenzijo.

$$\boxed{C(A)^{\perp} = N(A^{\mathsf{T}})}$$

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow x_1 = -2x_3 \\ \longrightarrow 2x_2 = -3x_3 \longrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ \end{matrix}$$

V $N(A^{\mathsf{T}})$ so vektorji oblike $\begin{bmatrix} -2x_3 & -\frac{3}{2}x_3 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ za $x_3 \in \mathbb{R}$. Za $x_3 = 2$ dobimo $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$V = C(A)^{\perp} = N(A^{\mathsf{T}}) = \mathcal{L}in(\{\vec{v}\})$, $\dim V = 1$.

2. način. Naj bosta $\vec{c}_1$ in $\vec{c}_2$ prva dva stolpca A. Potem je $C(A) = \mathcal{L}in(\{\vec{c}_1, \vec{c}_2\})$. Ker smo v $\mathbb{R}^3$, iščemo en neničelni vektor, pravokoten na $\vec{c}_1$ in $\vec{c}_2$.

To deluje le v $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{c}_1 \times \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \vec{w}.$$

Torej je $C(A)^{\perp} = \mathcal{L}in(\{\vec{w}\})$.

Ista rešitev kot zgoraj, ker je $\vec{w} \parallel \vec{v}$.

(b) Poišči podprostor U vseh vektorjev $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, ki so pravokotni na $C(A^{\mathsf{T}})$. Poišči bazo za U in določi njegovo dimenzijo.

$$U = C(A^{\mathsf{T}})^{\perp} = N((A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}) = N(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow x_1 = -x_3 \\ \rightsquigarrow x_2 = 0 \end{matrix} \Bigg\} \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$U = N(A) = \mathcal{L}in(\{\vec{u}\})$. $\dim U = 1$.