Diskretne strukture UNI, 13. 1. 2022 ($11^{15} - 13^{00}$, P18)

1. Definiran je graf $G = (V, E)$, kjer je

$$\begin{aligned} V &= \{1,2,3,4,5,6\}, \\ E &= \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{1,6\},\{1,3\},\{3,6\},\{4,6\}\}. \end{aligned}$$

(a) Nariši graf G.

(b) Določi zaporedje stopenj točk grafov G in $\overline{G}$ ter najmanjšo ter največjo stopnjo točk grafov G in $\overline{G}$.

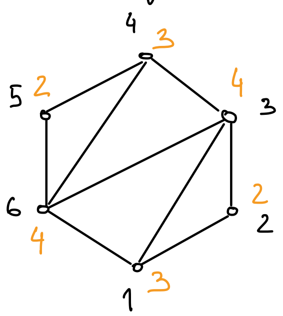
(c) Koliko ciklov dolžin 3 in 4 vsebuje graf G?

(d) Ali je graf G dvodelen?

(e) Ali je graf G Eulerjev?

Neusmerjen graf $G = (V, E)$ je par (V, E), V je množica točk oz. vozlišč grafa, E pa množica povezav.

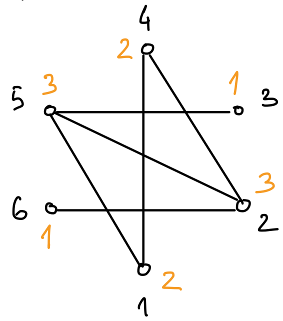
(a)



graf G

Kaj je $\overline{G}$? $\overline{G}$ je **komplement** grafa G, $\overline{G} = (V, \overline{E})$, kjer je $\overline{E}$ množica vseh možnih povezav med točkami V, ki niso vsebovane v E.

graf $\overline{G}$ $\longrightarrow$

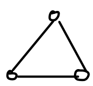


(b) Zapišimo stopnje k ustreznim točkam.

največja st. točke | najmanjša st. točke

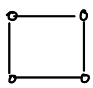
Zaporedje stopenj točk v:
- G : 4, 4, 3, 3, 2, 2, $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 2$
- $\overline{G}$: 3, 3, 2, 2, 1, 1, $\Delta(\overline{G}) = 3$, $\delta(\overline{G}) = 1$

(c) Cikel je graf take oblike:



cikel dolž. 3

ali



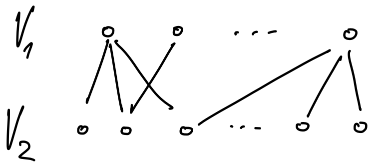
cikel dolž. 4

...

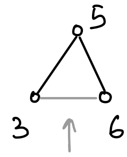
G ima 4 cikle dolž. 3.
G ima 3 cikle dolž. 4.

($\overline{G}$ nima ciklov dolž. 3 in ima en cikel dolž. 4.)

(d) Graf $G=(V,E)$ je dvodelen, če je $V=V_1\cup V_2$ in so v E le povezave med iz točk v V_1 v točke v V_2.



Poskusimo "razporediti" točke s slike grafa G na 2 "nivoja":



Ne gre! G ni dvodelen.

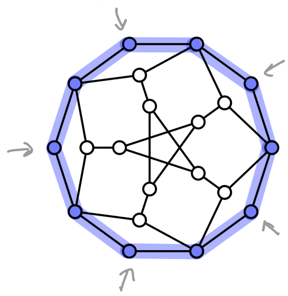
ta povezava je v G!

(e) Graf G je Eulerjev, če ima Eulerjev obhod, to je obhod, ki gre po vsaki povezavi grafa točno 1×.

G je Eulerjev natanko takrat, ko so vse točke G sode stopnje.

G iz naloge ni Eulerjev, saj ima točke lihe st. (dve stopnje 3).

3. Je spodnji graf Hamiltonov? Določi njegovo kromatično število.



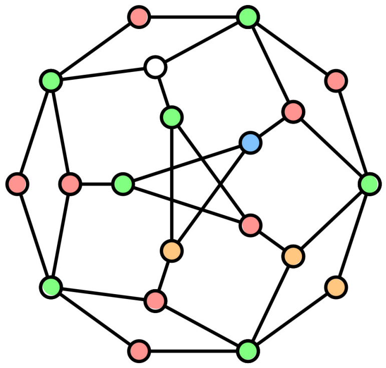
G je Hamiltonov, če ima Hamiltonov cikel – cikel, ki gre skozi vse točke grafa.

Zgleda, da ni Hamiltonov...

Vsak Hamiltonov cikel gre skozi točke st. 2, torej tudi vse povezave iz točk st. 2.

V našem grafu vse povezave iz točk. st. 2 že tvorijo cikel, ki ne gre skozi vse točke grafa. Ta graf torej ni Hamiltonov.

Kromatično št. grafa G, $\chi(G)$, je najmanjše št. barv, ki jih potrebujemo za barvanje točk grafa G, da sta vsaki dve sosednji točki različnih barv.



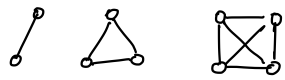
Izvedli smo barvanje tega grafa, uspelo nam je s 4 barvami.

$$2 = \omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) = 4$$

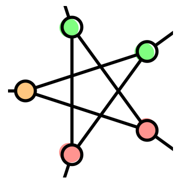
velikost največjega polnega podgrafa v G

največja st. točke v G

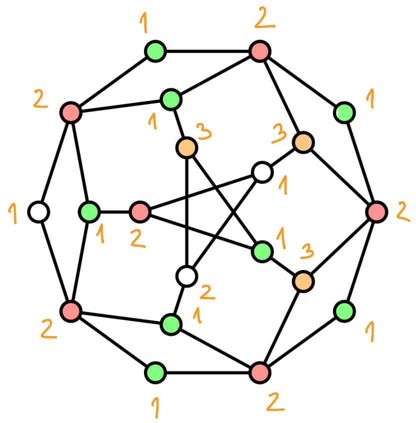
če G ni poln graf ali cikel lihe dolžine



Tega grafa gotovo ne moremo pobarvati z 2 barvama, saj vsebuje cikel dolž. 5. (lih cikel)



To pomeni $\chi(G) = 3, 4$. Poskusimo ga pobarvat s 3 barvami:



Uspelo nam je graf pobarvat s 3 barvami, ker G vsebuje lih cikel, je

$$\underline{\chi(G) = 3.}$$

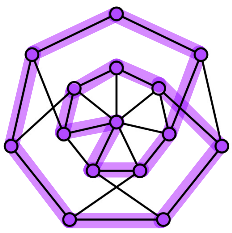
5. (a) Ali je spodnji graf Eulerjev?

(b) Ali je Hamiltonov?

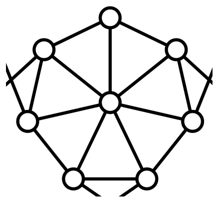
(c) Določi kromatično število tega grafa.

(a) Ni Eulerjev, saj vsebuje točke lihe stopnje.

(b) Je Hamiltonov, H.c. je označen.

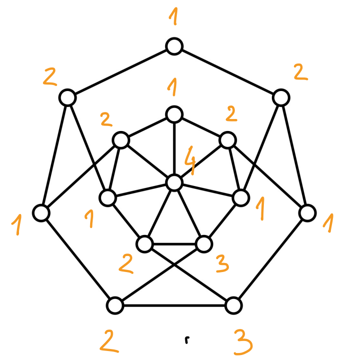


(c) $\underset{\omega(G)}{\underset{\parallel}{3}} \leq \chi(G) \leq \underset{\Delta(G)}{\underset{\parallel}{7}}$



Tu moramo obodni 7-kotnik pobarvat s 3 barvami (cikel lihe dolžine). Za točko na sredini nujno rabimo 4. barvo.

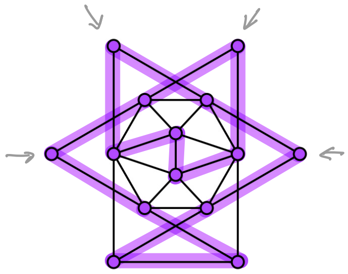
Torej $\chi(G) = 4$.



6. (a) Ali je spodnji graf Eulerjev? Ali je Hamiltonov?

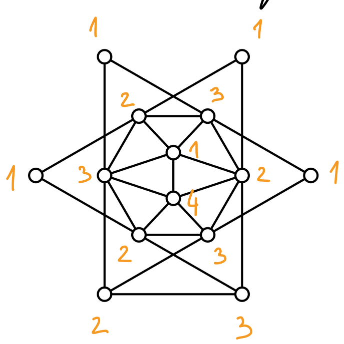
(b) Ali obstaja tako vozlišče u, da bo graf, ki ga dobimo, če grafu G odstranimo vozlišče u, dvodelen?

(c) Ali obstajata taki vozlišči u in v, da bo graf, ki ga dobimo, če grafu G odstranimo vozlišči u in v, dvodelen?



(a) Ni Eulerjev, saj ima točke lihe stopnje. Je Hamiltonov, H.c. je označen.

(b)



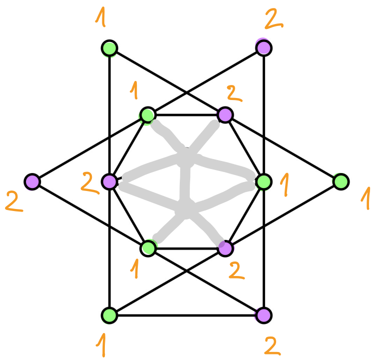
Graf je dvodelen, če je $\chi(G) \leq 2$.

Kolikšno je kromatično št. tega grafa G?

$4 \leq \chi(G) \leq 6$ .... $\chi(G) = 4$

Če odstranimo katerokoli točko iz G, je $\chi(G \setminus \{u\}) \geq 3$, torej $G \setminus \{u\}$ ni dvodelen.

(c)



$G \setminus \{u, v\}$ (brez obeh središčnih tč.) nam je uspelo pobarvat z 2 barvama, torej je dvodelen.