

1. Dani sta permutaciji

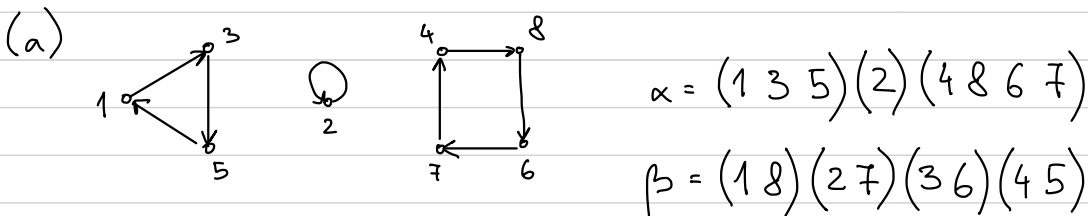
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zapiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov.

(b) Zapiši permutacijo $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$.

(c) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\alpha^k = \text{id}$.
 (d) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\beta^k = \text{id}$. } k je red perm. α oz. β

Permutacija je bijekcija $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Lahko jo zapišemo kot $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$.



(b) α^{-1} je inverz permutacije α ,

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 3 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 3)(2)(4 \ 7 \ 6 \ 8) = (5 \ 3 \ 1)(2)(7 \ 6 \ 8 \ 4)$$

$$\begin{aligned} \alpha * \beta * \alpha^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 3 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 8)(2 \ 6)(3 \ 7)(4 \ 5) \end{aligned}$$

(c) $\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 8 \end{pmatrix} = (1)(2) \dots (8)$

Cikel dolžine k ima red k , tj. ("cikel dolž. k ") ^{k} = id

$$\alpha^k = ((1 \ 3 \ 5)(4 \ 8 \ 6 \ 7))^k = (1 \ 3 \ 5)^k * (4 \ 8 \ 6 \ 7)^k, \quad k = \text{lcm}(\text{"dolžina ciklov"})$$

$$(x * y)^2 = x * y * x * y \neq x^2 * y^2, \quad \text{za } \alpha \text{ je}$$

$$\uparrow = x * x * y * y = x^2 * y^2.$$

$$\underline{k = \text{lcm}(3, 4) = 12}.$$

če sta δ in γ disj. cikla, je $\delta * \gamma = \gamma * \delta$

Red α je torej 12.

(d) Red β je $h = \text{lcm}(2, 2, 2, 2) = 2$.

2. Dana je permutacija

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi π^{-1} .

(b) Zapiši π kot produkt disjunktnih ciklov.

(c) Zapiši π kot produkt samih transpozicij. $\leftarrow$ cikli dolžine 2

(d) Določi π^2 in π^{2022} .

$$(b) \pi = (1843)(2)(576) = (1843)(576).$$

$$(c) \pi = (18)(14)(13)(57)(56)$$

$$(d) \pi^2 = (1843)^2 * (576)^2 = (14)(38) * (567), \quad \overbrace{(567)}^{\text{id}}$$
$$\pi^{2022} = (1843)^{2022} * (576)^{2022} = (1843)^2 * (576)^0 =$$
$$\alpha^{2022} = \alpha^{\text{red}(\alpha) \cdot l + r} = \underbrace{(\alpha^{\text{red}(\alpha)})^l}_{\text{id}} * \alpha^r = \alpha^r \quad \Bigg| \quad = (14)(38).$$
$$\left. \begin{array}{l} 2022 : 4 = l_1 \text{ (ost. 2)} \\ 2022 : 3 = l_2 \text{ (ost. 0)} \end{array} \right\}$$

4. Poišči vsaj dve permutaciji $\pi \in S_6$, za kateri je

$$\pi^3 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6).$$

π^3 ima ciklično strukturo $[2, 2, 2]$.

Cikel dolžine n pri potenciranju na potenco k razpade na $\gcd(n, k)$ ciklov dolžine $\frac{n}{\gcd(n, k)}$.

Zgled: $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6).$

Kaj so dopustne ciklične str. za π , če je c.s. π^3 $[2, 2, 2]$?

c.s. π	c.s. π^3
$[6]$	$[2, 2, 2]$
$[5, 1]$	$[5, 1]$
$[4, 2]$	$[4, 2]$
$[3, 3]$	$[1, 1, 1, 1, 1, 1]$
$[2, 2, 2]$	$[2, 2, 2]$

To sta $[6], [2, 2, 2]$.

Rešiti enačbe za vsako od teh c.s. sta:

• $[2, 2, 2]$: $\pi = (a\ b)(c\ d)(e\ f)$

$$\pi^3 = (a\ b)(c\ d)(e\ f) = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6).$$

Torej $\pi = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6).$

• $[6]$: $\pi = (a\ b\ c\ d\ e\ f)$

$$\pi^3 = (a\ d)(b\ e)(c\ f) = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$$

Torej $\pi = (1\ 3\ 5\ 2\ 4\ 6).$

Ali za $[6]$ kar direktno: $\pi = (1\ 5\ 4\ 2\ 6\ 3).$

Hinogrede, ta enačba ima 8 rešitev za c.s. $[6]$,

6. Dane so permutacije

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix} \quad \beta = (1\ 2)(1\ 6)(1\ 7)(1\ 3)(4\ 5)(4\ 10)(4\ 8)$$

$$\gamma = (1\ 4\ 9\ 3\ 6\ 7\ 2\ 8)$$

(a) Zapiši ciklične strukture permutacij α , β in γ ter določi njihove parnosti.

(b) Poišči vse možne ciklične strukture za permutacijo π , ki reši enačbo

$$\alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \gamma$$

(c) Poišči vsaj eno rešitev zgornje enačbe, ki ima najvišji možni red.

$$(a) \quad \alpha = (1\ 4\ 5)(2\ 3\ 6\ 7)(8\ 9\ 10) = (1\ 4)(1\ 5)(2\ 3)(2\ 6)(2\ 7)(8\ 9)(8\ 10)$$

$$\beta = (1\ 2\ 6\ 7\ 3)(4\ 5\ 10\ 8)$$

$$\gamma = (1\ 4\ 9\ 3\ 6\ 7\ 2\ 8)$$

soda ali liha, odvisno
od št. transpozicij
↓

perm.	cik. str.	parnost
α	$[4, 3, 3]$	liha
β	$[5, 4, 1]$	liha
γ	$[8, 1, 1]$	liha

$$(b) \quad \alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \gamma \quad / * \beta$$

$$\alpha^{-1} * \alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} * \beta = \gamma * \beta \quad \dots \quad \alpha * \beta * \pi^4 = \gamma * \beta$$

$$\beta^{-1} * \beta * \pi^4 = \alpha^{-1} * \gamma * \beta \quad \dots$$

$$\pi^4 = \beta^{-1} * \alpha^{-1} * \gamma * \beta = (1\ 4\ 8)(2\ 10\ 9)(3)(5)(6)(7)$$

Torej: π^4 ima c.s. $[3, 3, 1, 1, 1, 1]$, kar pomeni, da

so dopustne c.s. za π :

$$[3, 3, 1, 1, 1, 1]^3, [3, 3, 2, 1, 1]^6, [3, 3, 2, 2]^6, [3, 3, 4]^{12},$$

$$[6, 1, 1, 1, 1]^6, [6, 2, 1, 1]^6, [6, 2, 2]^6, [6, 4]^{12}. \quad \leftarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{ti dve imata najvišji} \\ \text{red med rešitvami en.} \end{matrix}$$

(c) Red permutacije z dano cik. str. označimo z zeleno.

$$\text{Poiščimo rešitev za } [6, 4]: \pi = (\underline{1\ 2\ 8\ 9\ 4\ 10})(\underline{3\ 5\ 6\ 7}).$$