

Diskretne strukture UNI, vaje, 03.11.2020

1. Preveri pravilnost sklepov s pomočjo pogojnega sklepa.

- (a) $p \Rightarrow (q \vee r), \neg r \models p \Rightarrow q$
- (b) $p \vee q \Rightarrow r \wedge s, r \vee t \Rightarrow u \models p \Rightarrow u$
- (c) $p \Rightarrow q \vee r, q \Rightarrow \neg p, \neg(s \wedge r) \models p \Rightarrow \neg s$
- (d) $s \wedge (p \Rightarrow t), t \Rightarrow (q \vee r) \models p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$
- (e) $\models (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models B \Rightarrow C$$

↑
Ta dva sklepa
sta hitro pravilna!
↓
Ko ima tabelične
oblike implikacije, lahko
uporabimo **pogojni sklep**.

$$A_1, A_2, \dots, A_n, B \models C$$

(a) 1. $p \Rightarrow q \vee r$ pred.
2. $\neg r$ pred.
3. 1. p pred. PS
3. 2. $q \vee r$ MP(3.1, 1)
3. 3. q DS(2, 3.2)
3. $p \Rightarrow q$ PS(3.1, 3.3)

$$\models p \Rightarrow q$$

($A, A \Rightarrow B \models B$)
($A \vee B, \neg B \models A$)

(b) 1. $p \vee q \Rightarrow r \wedge s$ pred.
2. $r \vee t \Rightarrow u$ pred.
3. 1. p pred. PS
3. 2. $p \vee q$ Pd(3.1, q)
3. 3. $r \wedge s$ MP(3.2, 1)
3. 4. r Po(3.3)
3. 5. $r \vee t$ Pd(3.4, t)
3. 6. u MP(3.5, 2)
3. $p \Rightarrow u$ PS(3.1, 3.6)

$$\models p \Rightarrow u$$

$$(A \models A \vee B) \text{ pridružitve}$$

$$(A \wedge B \models A) \text{ poenostavitev}$$

Sklep je dokazan (z uporabo pogojnega sklepa), torej je pravilen.

(d) 1. $s \wedge (p \Rightarrow t)$ pred.
2. $t \Rightarrow q \vee r$ pred.
3. 1. p pred. PS
3. 2. $p \Rightarrow t$ Po(1)
3. 3. $p \Rightarrow q \vee r$ HS(3.2, 2)
3. 4. $q \vee r$ MP(3.1, 3.3)
3. 5. 1. $\neg q$ pred. PS
3. 5. 2. r DS(3.5.1, 3.4)
3. 5. $\neg q \Rightarrow r$ PS(3.5.1, 3.5.2)
3. $p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$ PS(3.1, 3.5)

$$\models p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$$

$$(A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C)$$

$$3.5. \neg q \Rightarrow r \sim 3.4$$

$$3. p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r) \text{ PS}(3.1, 3.5)$$

$$(e) \quad \overbrace{\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))}^A \Rightarrow \overbrace{((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))}^B$$

$$\begin{array}{ll} 1.1. \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r) & \text{pred. PS} \\ 1.2.1. \quad p \Rightarrow q & \text{pred. PS} \\ 1.2.2.1. \quad p & \text{pred. PS} \\ 1.2.2.2. \quad q & \text{MP}(1.2.2.1, 1.2.1) \\ 1.2.2.3. \quad q \Rightarrow r & \text{MP}(1.2.2.1, 1.1) \\ 1.2.2.4. \quad r & \text{MP}(1.2.2.2, 1.2.2.3) \\ 1.2.2. \quad p \Rightarrow r & \text{PS}(1.2.2.1, 1.2.2.4) \\ 1.2. \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) & \text{PS}(1.2.1, 1.2.2) \\ 1. \quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) & \text{PS}(1.1, 1.2) \end{array}$$

3. Prevedi spodnje sklepe v simbolični zapis in ugotovi, ali so pravilni.

- (a) Če se učim za izpit, potem ga naredim. Za izpit se nisem učil. Torej ne bom naredil.
- (b) Če pes vidi lopova ali mačko, bo zalajal. Pes zalaja, a lopova ni na spregled. Torej pes vidi mačko.
- (c) Če ni petek, grem na predavanje. Danes je petek. Torej ne grem na predavanje.
- (d) Če grem z avtobusom ali vlakom, bom zamudil na sestanek. Če grem s taksijem, bom prišel pravočasno, ampak bom bankrotiral. Če ne grem niti z avtobusom niti z vlakom, bom šel s taksijem. Ne bom zamudil na sestanek. Torej bom bankrotiral.
- (e) Če sije sonce, grem na sprehod. Če je mrzlo, pečem piškote. Če pečem piškote, potem ne grem na sprehod. Danes je mrzlo. Torej ne sije sonce.

$$(a) \quad \underbrace{u \Rightarrow n}_{\substack{1 \\ 1}}, \underbrace{\neg u}_{\substack{1 \\ 1}} \vdash \underbrace{\neg n}_{\substack{1 \\ 0}}$$

$u \dots$ Učim se za izpit.
 $n \dots$ Naredim izpit.

Ali je ta sklep pravilen?

Poskusimo poiskati protiprimer: $n \sim 1, u \sim 0 \leftarrow$ to je protiprimer, sklep ni pravilen.

$$(d) \quad a \vee v \Rightarrow z, t \Rightarrow \neg z \wedge b, \neg a \wedge \neg v \Rightarrow t, \neg z \vdash b$$

$$1. \quad a \vee v \Rightarrow z \quad \text{pred.}$$

$$2. \quad t \Rightarrow \neg z \wedge b \quad \text{pred.}$$

$$3. \quad \neg a \wedge \neg v \Rightarrow t \quad \text{pred.}$$

$$4. \quad \neg z \quad \text{pred.}$$

$$5. \quad \neg(a \vee v) \quad \text{MT}(4, 1.)$$

$$6. \quad \neg a \wedge \neg v \quad \sim 5.$$

$$7. \quad t \quad \text{MP}(6, 3.)$$

$$8. \quad \neg z \wedge b \quad \text{MP}(2, 7.)$$

$$9. \quad b \quad \text{Po}(8)$$

$$(A \Rightarrow B, \neg B \vdash \neg A)$$

$a \dots$ Grem z avtobusom.

$v \dots$ Grem z vlakom.

$t \dots$ Grem s taksijem.

$z \dots$ Zamudil bom.

$b \dots$ Bankrotiral bom.

Sklep je dokazan, torej je pravilen.

2. Preveri pravilnost sklepov s pomočjo dokaza s protislovjem (*reductio ad absurdum*).

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), s \wedge q \Rightarrow t, \neg t \models \neg(p \wedge r)$

(b) $p \vee q, p \Rightarrow r, q \Rightarrow s \models r \vee s$

(c) $p \vee q, p \vee r, r \Rightarrow s, \neg(q \wedge s) \models p$

(d) $p \Rightarrow r \wedge t, t \vee s \Rightarrow \neg q \models \neg(p \wedge q)$

(e) $p \Leftrightarrow q, r \vee s \Rightarrow p, s \vee t, \neg t \vee r \models q$

Sklepa $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ ter $A_1, A_2, \dots, A_n, \neg B \neq 0$ sta
klasični pravilna.

(a) 1. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$ pred.
2. $s \wedge q \Rightarrow t$ pred.
3. $\neg t$ pred.
4. $\neg(s \wedge q)$ MT(2, 3)
5. $\neg s \vee \neg q \sim$ 4.
6. $p \Rightarrow q$ Po(1)
7. $r \Rightarrow s$ Po(1)
8.1. $\neg \neg(p \wedge r)$ pred. RA
8.2. $p \wedge r \sim$ 8.1
8.3. p Po(8.2)
8.4. q MP(8.3, 6)
8.5. $\neg s$ DS(5, 8.4)
8.6. r Po(8.2)
8.7. s MP(7, 8.6)
8.8. $\neg s \wedge s$ Zd(8.5, 8.7)
8.9. $0 \sim$ 8.8.
8. $\neg(p \wedge r)$ RA(8.1, 8.9)

$$\models \neg(p \wedge r)$$

$$(A, B \models A \wedge B)$$

(b) 1. $p \vee q$ pred.
2. $p \Rightarrow r$ pred.
3. $q \Rightarrow s$ pred.
4.1. $\neg(r \vee s)$ pred. RA
4.2. $\neg r \wedge \neg s \sim$ 4.1
4.3. $\neg r$ Po(4.2)
4.4. $\neg p$ MT(4.3, 2)
4.5. $\neg s$ Po(4.2)
4.6. $\neg q$ MT(4.5, 3)
4.7. $\neg p \wedge \neg q$ Zd(4.4, 4.6)
4.8. $\neg p \wedge \neg q \wedge (p \vee q)$ Zd(4.7, 1)
4.9. $0 \sim$ 4.8
4. $r \vee s$ RA(4.1, 4.9)

$$\models r \vee s \quad (\sim \neg r \Rightarrow s)$$

$$\neg p \wedge \neg q \wedge (p \vee q) \sim \underbrace{\neg p \wedge \neg q \wedge p}_0 \vee \underbrace{\neg p \wedge \neg q \wedge q}_0$$