

1. (a) Poišči splošno rešitev $y(t)$ diferencialne enačbe

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0.$$

- (b) Poišči posebno rešitev $y_p(t)$ diferencialne enačbe

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = e^{-t}$$

in s pomočjo točke (a) zapiši splošno rešitev $y(t)$ te enačbe.

- (c) Reši še začetni problem

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = e^{-t}, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2.$$

2. Poišči rešitev $y(t)$ začetnega problema

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 5t + 7, y(0) = 2, \dot{y}(0) = 0.$$

3. Poišči splošno rešitev $y(t)$ diferencialne enačbe

$$\ddot{y} + \ddot{y} - 2y = 2t^2.$$

4. Van der Pol-ov oscilator je dinamični sistem z nelinearnim dušenjem, ki zadošča diferencialni enačbi 2. reda

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

- (a) Zapiši to diferencialno enačbo 2. reda kot sistem diferencialnih enačb 1. reda (z uvedbo nove spremenljivke $y = \dot{x}$). Nariši fazno sliko tega sistema za $\mu = 1$ in nekaj izbranih začetnih pogojev.
- (b) Poišči stacionarne točke dobljenega sistema 1. reda in poračunaj lastne vrednosti Jacobijeve matrike desne strani v stacionarnih točkah. (Pomagaj si z octave-om.) Kaj ugotoviš?
- (c) Poišči začetni pogoj $[x(0), \dot{x}(0)]^T$, za katerega je $y(0) = \dot{x}(0) = 0$, ki opisuje periodično rešitev tega sistema diferencialnih enačb, tj. poišči *limitni cikel* tega sistema. (Začni z $x(0) = x_0 > 0$ in $\dot{x}(0) = 0$, nato pa poišči x_1 , pri katerem tir gibanja ponovno seka poltrak $x \geq 0, y = 0$. S tem je opisana funkcija $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $x_0 \mapsto x_1$. Poiskati moraš fiksno točko te funkcije, tj. rešiti enačbo $f(x) = x$.)

5. Obravnavati želimo spodnji sistem nelinearnih diferencialnih enačb 1. reda:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$. (Ta sistem je znan kot *Rösslerjev atraktor*.) Če ni drugače zapisano, bomo za vrednosti parametrov vzeli $a = 0.2$, $b = 0.2$ ter $c = 5.7$.

- (a) Za različne začetne pogoje poišči numerične rešitve tega sistema in jih nariši z octave-om. Uporabi rk4. Poskusi kvalitativno oceniti obnašanje.
- (b) Če funkcije x , y in z zložimo v vektor $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$, lahko sistem zapišemo v strnjeni obliki $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, kjer je $\mathbf{F}$ funkcija določena z desno stranjo. (Sistemu diferencialnih enačb, pri katerem funkcija $\mathbf{F}$ na desni strani ni odvisna od t , pravimo *avtonomen*.) Poišči stacionarne točke tega avtonomnega sistema diferencialnih enačb. (To so točke, v katerih velja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.) Lahko si pomagáš z Mathematico.
- (c) Če je $\mathbf{x}$ blizu stacionarne točke $\mathbf{x}_0$, potem je $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \doteq J\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Sistem diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ lahko torej v bližini stacionarne točke $\mathbf{x}_0$ aproksimiramo s sistemom linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti $\dot{\mathbf{u}} = J\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$, kjer je $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $J\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ za prej izračunane stacionarne točke. Kako te lastne vrednosti vplivajo na obnašanje sistema v bližini stacionarnih točk?
- (d) Tokrat bomo parametre postavili na $a = 0.1$, $b = 0.1$ in $c = 4$, 12.8 ali 14. Recimo, da je naš začetni pogoj oblike $[0.1, y_0, z_0]^T$ (začnemo torej na ravnini z enačbo $x = 0.1$). Naj bo $[0.1, y_1, z_1]^T$ točka na ravnini $x = 0.1$, v kateri rešitev (prvič) ponovno seka ravnino $x = 0.1$. Preslikavi $\mathbf{P}$ določeni s predpisom $\mathbf{P}([y_0, z_0]^T) = [y_1, z_1]^T$ pravimo *Poincaréjeva preslikava*. Poišči sliko Poincaréjeve preslikave tega sistema (preseki tira z ravnino $x = 0.1$).

6. Sistemu linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= cx - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

kjer je $a = 10$, $b = 8/3$ in $c = 16$, pravimo Pan–Xu–Zhou-jev atraktor. (Podoben je Lorenz-ovemu atraktorju.)

- (a) Poišči stacionarne točke tega avtonomnega sistema in opiši obnašanje rešitev v bližini teh stacionarnih točk. Pomagaj si z octave-om.
- (b) Numerično (z uporabo rk4) poišči nekaj rešitev tega sistema. Začetne pogoje postavi v bližino stacionarnih točk, na z -os, blizu z -osi. Kdaj se sistem obnaša kaotično?