1. Poišči (ekonomični) singularni razcep matrike
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$
tj. poišči ortogonalni matriki U in V ter (kvadratno) diagonalno matriko S, da bo $A = USV^{\mathsf{T}}$. Lahko slediš tem korakom:
   (a) Diagonaliziraj AA^{T} v ortonormirani bazi $\mathbb{R}^2$. Prepričaj se, da je prehodna matrika ravno U, diagonalna matrika pa točno S^2.
   (b) S pomočjo S in U iz prejšnje točke ter zapisa $A = USV^{\mathsf{T}}$ določi še V.

Rešitev: (a) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AA^{\mathsf{T}} = UDU^{\mathsf{T}}$. (b) U kot prej, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $V = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Naj bo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ predoločen sistem linearnih enačb, tj. matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je pokončna; $m \geq n$. Denimo, da poznamo singularni razcep A; $A = USV^{\mathsf{T}}$. Naj bo S^+ matrika, ki jo dobimo iz S, tako da vse neničelne singularne vrednosti $\sigma_i > 0$ zamenjamo z $\frac{1}{\sigma_i}$ in transponiramo. Označimo $A^+ = VS^+U^{\mathsf{T}}$. Preveri naslednje:
   (a) Če je A kvadratna in polnega ranga, potem je $A^+ = A^{-1}$.
   (b) Vektor $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ je rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ v smislu linearne metode najmanjših kvadratov (tj. $A^+\mathbf{b}$ je ena od rešitev sistema $A^{\mathsf{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$).

3. Zaporedji a_n in b_n sta dani rekurzivno s formulama
$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{aligned}$$
in z začetnima členoma $a_1 = 0$ in $b_1 = 1$. Določi splošna člena zaporedij a_n in b_n.

4. Zaporedje je podano rekurzivno s formulo
$$a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$
in začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$. Določi eksplicitno formulo za a_n.
   (a) Rekurzivno formulo najprej napiši v matrični obliki
$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$
   za vektor $[a_n, b_n]$, kjer je $b_n = a_{n-1}$.
   (b) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.
   (c) Začetni vektor $\mathbf{x}_1 = [a_1, b_1]^{\mathsf{T}} = [1, 0]^{\mathsf{T}}$ razvij po lastni bazi matrike A in poišči splošno formulo za a_n.

5. Zaporedje je dano rekurzivno s formulo
$$d_n = d_{n-1} - d_{n-2}$$
in začetnima členoma $d_1 = 1$ in $d_2 = 0$. Poišči eksplicitno formulo za d_n.