Linearna algebra	**Teden 5**

Vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Še nekaj lastnosti matričnih operacij in inverzov matrik, video.
  - Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem so naslednje trditve ekvivalentne:
    (1) A je obrnljiva.
    (2) $\operatorname{rank}(A) = n$.
    (3) Homogeni sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ ima le trivialno rešitev $\vec{x} = \vec{0}$.
    (4) Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.
  - Inverz transponirane matrike (in transponiranka produkta matrik), video.
  - Za obrnljivi matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja
    (1) $(A^{-1})^{-1} = A$,
    (2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
    (3) $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$,
    (4) $(A^{-1})^{\mathsf{T}} = \left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1}$.
  - ↯ Naloga 1: Če sta kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi in velja $(AB)^2 = A^2B^2$, potem pokažite, da matriki A in B komutirata ($AB = BA$).
  - Matrično množenje je distributivno. Tega na predavanjih nismo pokazali, a se lahko prepričate sami (z dokazom, da so posamezni elementi leve in desne strani enakosti enaki):
$$A(B + C) = AB + AC \text{ in } (A + D)C = AD + DC$$
    za $A, D \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$.
- *Vektorski podprostor*
  - Definicija vektorskega podprostora v $\mathbb{R}^n$, video.
    - Primer: Ali je množica $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & -y & -x \end{bmatrix}^{\mathsf{T}};\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$? (Rešitev.)
  - Ekvivalentna definicija vektorskega podprostora, video.
    - Za dano matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je množica
$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\vec{x} = \vec{0}\}$$
      vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Ta prostor imenujemo *ničelni prostor* matrike A (in je zelo pomemben prostor, ki ga bomo srečevali skozi cel semester).
    - Primer: Izračunajte ničelni prostor matrike $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.
      (Rešitev.)

- ϟ Naloga 2: Utemeljite, zakaj množica $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a^2 & b \end{bmatrix}^\mathsf{T};\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ <u>ni</u> vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$ (čeprav vsebuje $\vec{0}$).
- ϟ Naloga 3: Kaj mora veljati za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, da bo ravnina Σ v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $ax + by + cz = d$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$?

– *Linearna ogrinjača*, definicija in primeri, video.

– *Linearna neodvisnost*
  - ∗ Definicija, video.
  - ϟ Naloga 4: Naj bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni. Pokažite, da so linearno neodvisni tudi vektorji $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ in $\vec{a} + \vec{c}$.

– Zapiski predavanj 2019/20, 5. teden in Zapiski predavanj 2019/20, 6. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Vektorski prostor in podprostor, Poglavje 1.
(2) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 3.1.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 3.1.
⋆ (4) (Za zahtevnejše bralce) Vektorski prostor lahko definirate tudi bolj algebraično. Pokukajte v učbenik Tomaža Koširja: Linearna algebra, za definicijo in lastnosti vektorskih prostorov poglejte v poglavje VI. Večino pojmov, ki so vam tuji, boste našli v poglavju V.

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Če sta A in B obrnljivi $n \times n$ matriki, katere od naslednjih trditev so resnične?

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$
(b) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
(c) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
(d) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$
(e) AB je obrnljiva
(f) $A + B$ je obrnljiva

ϟ(2) Drži ali ne drži?
(a) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Za vsako $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba $AXB^{-1} = C$ natanko eno rešitev.
(b) Za vsako 4×4 matriko, ki ima zadnjo vrstico enako prvi, velja, da ni obrnljiva.
(c) Vsaka zgornje trikotna matrika je obrnljiva.
(d) Če je matrika A obrnljiva, ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ neskončno rešitev.
(e) Če je vektor $\vec{b}$ pravokoten na vse stolpce matrike A, potem je sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešljiv.

(f) Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *simetrična*, če velja $A = A^{\mathsf{T}}$. Če je simetrična matrika obrnljiva, potem je tudi njen inverz simetrična matrika.
(g) Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva. Ali obstaja obrnljiva matrika $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero velja $AXA + A = 0$?
(h) Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x + 2y + 3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
(i) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.

ϟ(3) Katere od naslednjih množic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^n$?
(a) Vsi vektorji dolžine 1.
(b) Vsi vektorji, ki so pravokotni na vektor $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
(c) Vsi vektorji, ki niso kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
(d) Vsi vektorji, ki so kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
(e) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je neničelna.
(f) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je ničelna.

ϟ(4) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor.
(a) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^{\mathsf{T}}$ simetrična matrika.
(b) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^{\mathsf{T}}$ matrika ranga 1.

ϟϟ(5) Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^n$. Pokažite, da je tudi $U \cap V$ vektorski prodprostor v $\mathbb{R}^n$.

ϟ(6) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 55 (a,b), 59(a), 68 (a).

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s ϟϟ pa je malce bolj zahtevna.)