Linearna algebra	**Teden 4**

Matrike.

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- *Transponirana matrika* ali *transponiranka*. video.
  - ↯ Naloga 1: Za vsako od naslednjih lastnosti razmislite, zakaj velja:
    - $(A^\top)^\top = A$,
    - $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$,
    - $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$.
- *Množenje matrike s skalarjem* video,
- *Vsota matrik* in *linearne kombinacije matrik*, video.
  - Primer: Ali lahko zapišemo matriko $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ kot linearno kombinacijo matrik $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$? (Rešitev.)
  - Lastnosti vsote matrik in množenja matrik s skalarji, video.
- *Množenje matrik*
  - Uvod, video.
  - Definicija, video.
  - Primer: Naj bosta $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte tiste izmed produktov AB, BA, $A^\top B$, $AB^\top$, ki jih lahko. (Rešitev.)
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.
  - ↯ Naloga 2: Zapišite primere
    1. neničelnih matrik A in B za katere je $AB = 0$ (s tem ste pokazali, da se lahko neničelni matriki zmnožita v ničelno),
    2. neničelnih matrik C in D za katere je $CD \neq DC$ (s tem ste pokazali, da množenje matrik ni komutativno),
    3. neničelnih matrik E, F in G za katere je $EG = FG$, a $E \neq F$ (s tem ste pokazali, da v matričnih enakostih ne morete krajšati skupnega faktorja),
  - Matrično množenje je asociativno:

$$A(BC) = (AB)C$$

za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$.
  - *Identična matrika*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

velikosti $n \times n$ je matrika, za katero velja $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ za vsako $m \times n$ matriko A.

- *Inverz* matrike.
  - Definicija, video.
  - Računanje inverza, video. V njem boste med drugim spoznali algoritem za računanje inverza kvadratne matrike: Inverz obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s pomočjo Gaussovih elementarnih operacij izračunamo na naslednji način:
    (1) Zapišemo zelo razširjeno matriko
    $$[A \,|\, I_n] \in \mathbb{R}^{n\times 2n},$$
    (2) nato na njej izvajamo Gaussove elementarne operacije.
      (a) V kolikor $\mathrm{rank}(A) < n$, matrika A ni obrnljiva in njen inverz ne obstaja.
      (b) Če je $\mathrm{rank}(A) = n$, potem izvajamo Gaussove elementarne operacije toliko časa, da na prvih n stolpcih pridobimo identično matriko I_n
      $$[A \,|\, I_n] \sim \ldots \sim [I_n \,|\, B].$$
      Inverz matrike A je enak $A^{-1} = B$.
  - ϟ Naloga 3: Izračunajte inverz 3×3 spodnje trikotne matrike
  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}.$$

- Zapiski predavanj 2019/20, 4. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 2.3.
(2) Polona Oblak: Matematika, Razdelek 6.3.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 2.5.
(4) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Sections 3.1, 3.2., 3.3..

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) *Diagonalna matrika* je kvadratna matrika, ki ima vse izvendiagonalne elemente enake 0. *Zgornje trikotna matrika* ima vse elemente pod diagonalo enake 0. *Spodnje trikotna matrika* ima vse elemente nad diagonalo enake 0. Pokažite, da je
  (a) inverz obrnljive diagonalne matrike diagonalna matrike,
  (b) inverz obrnljive zgornje trikotne matrike zgornje trikotna matrika in
  (c) inverz obrnljive spodnje trikotne matrike spodnje trikotna matrika.

ϟ(2) Kdaj je 2×2 matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

obrnljiva? V primeru, ko je obrnljiva, kaj je njen inverz A^{-1}?

ϟ(3) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 31-35, 40-42.