

Diskretne Strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

22. november 2021

Kaj je relacija

Množica R je *(dvomestna) relacija*, če je vsak njen element urejen par.

$$R \text{ je relacija.} \iff \forall x \in R \exists u, v : x = (u, v)$$

Množica R je *(dvomestna) relacija v množici* A , če je $R \subseteq A \times A$.

Zgledi

1. $A = \{a, b, c, d\}$ $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (c, a)\}$
2. $A = \mathbb{N}$ $R = \{(x, y) ; x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$

3. $\emptyset \subseteq A \times A$

4. $A \times A \subseteq A \times A$

5. $\text{id}_A = \{(x, x) ; x \in A\}$

Namesto $(x, y) \in R$ pišemo xRy .

Domena in zaloga vrednosti

Naj bo R relacija v A .

$\mathcal{D}_R = \{x ; \exists y : xRy\}$ *domena* ali *definicijsko območje* relacije R .

$\mathcal{Z}_R = \{y ; \exists x : xRy\}$ *zaloga vrednosti* relacije R .

Lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A . Pravimo, da je

1. R *refleksivna* $\iff \forall x \in A : xRx$
2. R *simetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
3. R *antisimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
4. R *tranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
5. R *sovisna* $\iff \forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
6. R *enolična* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$

Lastnosti relacij, zgledi

1. R *refleksivna* $\iff \forall x \in A : xRx$
2. R *simetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
3. R *antisimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
4. R *tranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
5. R *sovisna* $\iff \forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
6. R *enolična* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$

Katere lastnosti imajo relacije id_A v A , $\leq$ v $\mathbb{N}$, $<$ v $\mathbb{N}$, $\subseteq$ v $\mathcal{P}A$,
"oče" v množici ljudi?

Operacije z relacijami

Relacije so posebne vrste množic. Vemo, kako so definirane operacije $\cup$, $\cap$ in $\setminus$.

Ponavadi se pogovarjamo o družini relacij na isti množici A . V takem primeru je *komplement* smiselno definirati kot

$$R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$$

Operacije z relacijami

Poleg navedenih operacij definiramo tudi:

- ▶ *inverzna relacija* relacije R , označimo jo z R^{-1} :

$$R^{-1} := \{(y, x) ; (x, y) \in R\}$$

- ▶ *produkt relacij* R in S , označimo ga z $R * S$:

$$R * S := \{(x, z) ; \exists y (xRy \wedge ySz)\}$$

Operacije z relacijami

Zgled: sorodstvene relacije med ljudmi

Relacija *oče* v množici ljudi je definirana kot

$$x \text{ oče } y \Leftrightarrow x \text{ je oče } y\text{-ona..}$$

Naloga: Izrazi relacije *roditelj*, *zet*, *snaha*, *ded*, *vnuk*, *tašča*, *svak* z “bolj elementarnimi” sorodstvenimi relacijami *oče*, *mati*, *sin*, *hči*, *mož*, *žena*, ...

Lastnosti operacij z relacijami

Naj bodo R, S, T relacije na A .

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$
3. $(R * S) * T = R * (S * T) =: R * S * T$
4. $R * (S \cup T) = R * S \cup R * T$
5. $(R \cup S) * T = R * T \cup S * T$
6. $R * \text{id}_A = \text{id}_A * R = R$
7. $R \subseteq S \implies R * T \subseteq S * T$ in $T * R \subseteq T * S$

Grafična predstavitev relacije

R naj bo relacija v *končni* množici A .

Elemente množice A narišemo kot *točke* v ravnini. Če velja aRb , narišemo usmerjeno puščico od a do b .

elementi A ... točke v ravnini

aRb ... usmerjena puščica od a do b .

Zgled: $A = \{a, b, c, d\}$ $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (c, a)\}$

Graf in lastnosti relacij

Kako iz grafa relacije R preberemo njene lastnosti?

Potence relacij

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo potence relacij. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$$\begin{aligned} R^0 &:= \text{id}_A \\ R^{n+1} &:= R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{aligned}$$

Velja $R^1 = R$, $R^2 = R * R$, ter za $m, n \geq 0$ tudi $R^m * R^n = R^{m+n}$.

Potence relacij

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je $n > 0$, potem je

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Potence relacij

Zgled: sorodstvene relacije med ljudmi

Naloga: definiraj relacije *prednik*, *potomec*, *sorodnik*.

Ovojnice

Naj bo R relacija v A .

Relacijo R^+ imenujemo *tranzitivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

Relacijo R^* imenujemo *tranzitivno-refleksivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

Algebraična karakterizacija lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A . Relacija R je

1. R *refleksivna* $\iff \text{id}_A \subseteq R$
2. R *simetrična* $\iff R^{-1} = R$
3. R *antisimetrična* $\iff R^{-1} \cap R \subseteq \text{id}_A$
4. R *tranzitivna* $\iff R^2 \subseteq R$
5. R *sovisna* $\iff \text{id}_A \cup R \cup R^{-1} = U_a$
6. R *enolična* $\iff R^{-1} * R \subseteq \text{id}_A$

Ekvivalenčna relacija

$R \subseteq A \times A$ je *ekvivalenčna*, če je

- ▶ refleksivna,
- ▶ simetrična in
- ▶ tranzitivna.

Ekvivalenčna relacija

Zgledi:

1. Relacija $\parallel$ vzporednosti v množici vseh premic v ravnini.
2. $A = \{\text{ljudje}\}$, $xRy \iff x$ ima enako barvo oči kot y .
3. Naj bo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Definirajmo relacijo R v množici $\mathbb{Z}$:

$$xRy \iff m \text{ deli } |x - y|$$

Ekvivalenčni razredi

Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna in $x \in A$.

$R[x] = \{y \in A ; yRx\}$ je *ekvivalenčni razred* elementa x .

$A/R = \{R[x] ; x \in A\}$ (množica vseh ekvivalenčnih razredov) je *faktorska (kvocientna) množica* množice A po relaciji R .

Ekvivalenčni razredi, razbitje

Trditev

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A . Potem za poljubna $x, y \in A$ velja

$$R[x] = R[y] \iff xRy$$

Izrek

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A . Potem je A/R razbitje množice A .

Zgledi faktorskih množic

- “premise v ravnini” / “vzporedne premise” =
- ▶ $\{\{\text{navpične pr.}\}, \{\text{vodoravne pr.}\}, \{\text{pr. pod kotom } 45^\circ\}, \dots\} \cong$
“množica vseh smeri v ravnini” $\cong [-\pi/2, \pi/2)$

Relacije urejenosti

Naj bo R relacija v množici A .

R *delno ureja* A , če je

1. refleksivna,
2. antisimetrična in
3. tranzitivna.

R *linearno ureja* A , če

1. R delno ureja A in je
2. R sovisna.

Definicija 1.1.1. Relacija R delno ureja množico A , če je

Relacije urejenosti

Zgledi:

- ▶ $\subseteq$ delno ureja vsako družino množic.
- ▶ $|$ (deljivost) delno ureja $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- ▶ $\leq$ linearno ureja $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Hassejev diagram

Naj bo A delno urejena z relacijo $\leq$ in naj bosta $x, y \in A$:

$$x < \cdot y \iff x < y \text{ in } \forall z \in A : (x \leq z \leq y \Rightarrow z = x \vee z = y)$$

Pravimo, da je y je *neposredni naslednik* x -a in
 x *neposredni predhodnik* y -a.

Hassejev diagram

Hassejev diagram je slikovni prikaz delne urejenosti.

Naj bo A delno urejena z relacijo $\leq$

elementi A ... točke v ravnini

$a < \cdot b$... a narišemo *nižje* od b in ju povežemo z daljico.

$x \leq y$ velja natanko tedaj, ko lahko v Hassejem diagramu pridemo od x do y po *vzpenjajoči se poti*.

Hassejev diagram

Zgledi:

- ▶ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, relacija *deli*.
- ▶ $\subseteq$ v množici $\mathcal{P}\{1, 2, 3\}$.
- ▶ $\leq$ v množici naravnih števil.
- ▶ *deli* v množici deliteljev števila 60.

Preslikave

Relacija $f \subseteq A \times B$ je *preslikava iz A v B*, če velja:

- ▶ f je enolična
- ▶ $\mathcal{D}_f = A$
- ▶ $(\mathcal{Z}_f \subseteq B)$

Pišemo tudi $f : A \rightarrow B$.

Preslikave

Naj bo f preslikava iz A v B .

Namesto $x f y$ pišemo $y = f(x)$.

- ▶ $A = \mathcal{D}_f$... domena ali definicijsko območje f
- ▶ $\mathcal{Z}_f$... zaloga vrednosti f
- ▶ B ... kodomena f

Za množico preslikav iz A v B uporabljamo oznako

$$B^A = \{f ; f : A \rightarrow B\}$$

Lastnosti preslikav

Naj bo $f : A \rightarrow B$. Pravimo, da je

- ▶ f *injektivna*, če $\forall x, y \in A : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- ▶ f *surjektivna*, če $\mathcal{Z}_f = B$ (pravimo tudi, da je f preslikava iz A **na** B)
- ▶ f *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Zgledi

- ▶ $\text{id}_A : A \rightarrow A$, *identiteta na A*
 $\text{id}_A(x) = x$, je bijektivna
- ▶ $p_i : A_1 \times \cdots \times A_n \rightarrow A_i$, *projekcija na i-to komponento*
 $p_i((a_1, \dots, a_n)) = a_i$, je surjektivna
- ▶ $A_1 \subseteq A$, $i = \text{id}_A|_{A_1}$
 $i : A_1 \hookrightarrow A$, $i(x) = x$ je injektivna , *vložitev A_1 v A*
- ▶ $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna, $p : A \rightarrow A/R$
 $p(x) = R[x]$ je surjektivna , *naravna projekcija*
- ▶ $A \subseteq B$, $\chi_A : B \rightarrow \{0, 1\}$
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} ,$$
karakteristična funkcija množice A (v B)
- ▶ $\emptyset$, *prazna preslikava*
 $\emptyset : \emptyset \rightarrow B$

Inverzna preslikava

Vprašanje: Kdaj je f^{-1} preslikava?

Trditev

$f : A \rightarrow B$

1. f^{-1} je enolična natanko tedaj, ko je f injektivna,
2. $f^{-1} : B \rightarrow A$ natanko tedaj, ko je f bijektivna.

Kompozitum preslikav

Naj bo $f \subseteq A \times B$ in $g \subseteq B \times C$. Definirajmo

$$g \circ f = f * g$$

V tem primeru je $f * g \subseteq A \times C$.

Denimo, da $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$. Potem

$$\begin{aligned} z = (g \circ f)(x) &\sim x(f * g)z \sim \exists y : (x f y \wedge y g z) \sim \\ &\sim \exists y : (y = f(x) \wedge z = g(y)) \sim z = g(f(x)) \end{aligned}$$

Lastnosti kompozituma

Trditev

Naj bo $f : A \rightarrow B$. Potem je

$$f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$$

Lastnosti kompozituma

Trditev

$$f : B \rightarrow C, g : A \rightarrow B$$

1. f, g injektivni $\implies f \circ g$ injektivna
2. f, g surjektivni $\implies f \circ g$ surjektivna
3. $f \circ g$ injektivna $\implies g$ injektivna
4. $f \circ g$ surjektivna $\implies f$ surjektivna

Lastnosti kompozituma

Trditev

Naj bo $f : B \rightarrow A, g : A \rightarrow B$. Če je $f \circ g = \text{id}_A$ in $g \circ f = \text{id}_B$, potem sta f in g bijekciji in je $g = f^{-1}$.