

Diskretne strukture UNI

Vaje 13

1. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zapiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov.
- (b) Zapiši permutacijo $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$.
- (c) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\alpha^k = \text{id}$.
- (d) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\beta^k = \text{id}$.

2. Dana je permutacija

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Določi π^{-1} .
- (b) Zapiši π kot produkt disjunktnih ciklov.
- (c) Zapiši π kot produkt samih transpozicij.
- (d) Določi π^2 in π^{2022} .

3. Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov

$$\pi_n = (1 \ 2 \ n)(1 \ 3 \ n) \cdots (1 \ n-1 \ n).$$

- (a) Zapiši permutacije π_4, π_5 in π_6 .
- (b) Izračunaj $\pi_n(1), \pi_n(n), \pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.
- (c) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n .

4. Poišči vsaj dve permutaciji $\pi \in S_6$, za kateri je

$$\pi^3 = (1 \ 2)(3 \ 4)(5 \ 6).$$

5. Dane so permutacije

$$\alpha = (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11), \quad \beta = (2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10) \quad \text{in} \quad \gamma = (1 \ 9 \ 5)(2 \ 10 \ 8 \ 6 \ 4)(3 \ 11 \ 7).$$

- (a) Utemelji, da α in β komutirata.
- (b) Preveri, da $\pi = \alpha^2 * \beta^2$ reši enačbo $\pi^2 = \gamma$.
- (c) Poišči še eno rešitev enačbe $\pi^2 = \gamma$, ki ni enake parnosti kot $\alpha^2 * \beta^2$.

6. Dane so permutacije

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix} \quad \beta = (1 \ 2)(1 \ 6)(1 \ 7)(1 \ 3)(4 \ 5)(4 \ 10)(4 \ 8)$$

$$\gamma = (1 \ 4 \ 9 \ 3 \ 6 \ 7 \ 2 \ 8)$$

- (a) Zapiši ciklične strukture permutacij α, β in γ ter določi njihove parnosti.
- (b) Poišči vse možne ciklične strukture za permutacijo π , ki reši enačbo

$$\alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \gamma$$

- (c) Poišči vsaj eno rešitev zgornje enačbe, ki ima najvišji možni red.