

Diskretne Strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

8. november 2021

Operacije z množicami

relacija pripadnosti ... $x \in A$

x *pripada* A .

podajanje množic

- ▶ z naštevanjem elementov $A = \{0, 1, 2\}$
- ▶ z neko izjavno formulo $A = \{x ; \varphi(x)\}$
Velja: $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x)$

Enakost in vsebovanost

Množici A in B sta *enaki*,

$$A = B \iff \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Množica A je *podmnožica* množice B ,

$$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

relacija *vsebovanosti (inkluzije)*.

Množica A je *prava podmnožica* množice B ,

$$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$$

relacija *stroge vsebovanosti (stroge inkluzije)*.

Operacije z množicami

- ▶ *unija* $A \cup B = \{x ; x \in A \vee x \in B\}$
- ▶ *presek* $A \cap B = \{x ; x \in A \wedge x \in B\}$
- ▶ *razlika* $A \setminus B = \{x ; x \in A \wedge x \notin B\}$
- ▶ *simetrična razlika* $A + B = \{x ; x \in A \vee x \in B\}$

Lastnosti operacij

- ▶ $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- ▶ $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- ▶ $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- ▶ $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*, če je $A \cap B = \emptyset$.

Univerzalna množica in komplement

Univerzalna množica, označimo jo z S , ustreza področju pogovora v predikatnem računu. Z univerzalno množico se izognemo Russellovi antinomiji.

Vse obravnavane množice so vsebovane v univerzalni množici S .

Komplement množice A , označimo ga z A^c , definiramo kot

$$A^c = S \setminus A$$

Lastnosti komplementa

- ▶ $(A^c)^c = A$
- ▶ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- ▶ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- ▶ $A \setminus B = A \cap B^c$
- ▶ $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
- ▶ $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$

Enakosti z množicami

Pokažimo, da velja

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Enakosti z množicami

1. Zakon dvojnega komplementa: $(A^c)^c = A$
2. Idempotenca: $A \cap A = A \quad A \cup A = A$
3. Komutativnost: $A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$
 $A + B = B + A$
4. Asociativnost: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $(A + B) + C = A + (B + C)$
5. Absorpcija: $A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$
6. Distributivnost: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$
7. de Morganova zakona: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Enakosti z množicami

8. Kontrapozicija: $A \subseteq B \sim B^c \subseteq A^c$
9. Lastnosti *prazne množice* $\emptyset$ in *univerzalne množice* S :
 $A \cup A^c = S \quad A \cap A^c = \emptyset$
 $A + A = \emptyset \quad A + A^c = S$
10. Še lastnosti $\emptyset$ in S : $A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A$
 $A \cap S = A \quad A \cup S = S$
11. Lastnosti vsebovanosti:
 $A \subseteq B \sim A \cup B = B \sim A \cap B = A \sim A \setminus B = \emptyset$
če $A \subseteq B$, potem $A \cup C \subseteq B \cup C$
če $A \subseteq B$, potem $A \cap C \subseteq B \cap C$
 $A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B$
12. Lastnosti razlike množic: $A \setminus B = A \cap B^c$
13. Lastnosti simetrične razlike: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
 $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Sistem enačb

Reši sistem enačb z množicami.

$$X \cup A = A \setminus X$$

$$X \cup A = X$$

Sistem enačb, še en zgled

Reši sistem enačb z množicami.

$$A \cup X = B$$

$$A \cap X = C$$

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Trditev

$$A \cup B = \emptyset \iff A = \emptyset \wedge B = \emptyset$$

Trditev

$$A + B = \emptyset \iff A = B$$

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Reši sistem enačb z množicami.

$$A \cap X = B \setminus X$$

$$C \cup X = X \setminus A$$

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Postopek:

1. Vse člene prenesemo na levo stran enačb z uporabo enakosti $B + B = \emptyset$ — vsaki enačbi na obeh straneh “prištejemo” njeno desno stran.

2. Vse enačbe združimo v eno samo z uporabo ekvivalence

$$A = \emptyset \wedge B = \emptyset \iff A \cup B = \emptyset$$

3. Vse operacije izrazimo z $\cup$, $\cap$ in c

$$A \setminus B = A \cap B^c \quad A + B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Z uporabo enakosti levo stran enačbe zapišemo kot unijo presekov danih množic, neznane množice ter njihovih komplementov. (“DNO”)

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Postopek:

4. Vsak presek oblike $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, ker so vse A_i znane množice ali njihovi komplementi nadomestimo z

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap X) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap X^c)$$

S tem dosežemo, da v vsakem preseku nastopa bodisi X bodisi X^c .

5. Izpostavimo X in X^c . Enačba dobi obliko

$$(P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset$$

6. Velja

$$(P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset \iff P \cap X = \emptyset \wedge Q \cap X^c = \emptyset$$

$$\iff Q \subseteq X \subseteq P^c$$

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Odgovor:

Sistem je rešljiv natanko tedaj, ko je

$$A \cap (B \cup C) = \emptyset$$

ali enakovredno

$$B \cup C \subseteq A^c.$$

V tem primeru je rešitev vsaka množica X , za katero velja

$$B \cup C \subseteq X \subseteq A^c.$$

Parametrično:

$$X = (B \cup C) \cup (T \cap A^c),$$

kjer je T poljubna množica

Potenčna množica

Potenčna množica množice A , $\mathcal{P}A$, je množica vseh podmnožic množice A .

$$\mathcal{P}A = \{B ; B \subseteq A\}$$

Tako $\emptyset$ kot A pripadata potenčni množici $\mathcal{P}A$.

$$\mathcal{P}\{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}\emptyset = \qquad \mathcal{P}\{\emptyset\} =$$

Izrek

Če ima množica A natanko n elementov, potem ima njena potenčna množica $\mathcal{P}A$ natanko 2^n elementov.

Družine množic

Naj bo

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\} = \{A_i ; i \in \mathcal{I}\}$$

družina množic.

Unija družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x ; \exists i (i \in \mathcal{I} \wedge x \in A_i)\}$$

Presek družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x ; \forall i (i \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in A_i)\}$$

Pokritje in razbitje

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in \mathcal{I}\}$ je *pokritje* množice B , če je

$$B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i.$$

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in \mathcal{I}\}$ je *razbitje* množice B , če je

- ▶ $\mathcal{A}$ pokritje množice B
- ▶ elementi $\mathcal{A}$ so neprazni in
- ▶ elementi $\mathcal{A}$ so paroma disjunktni .

Urejeni pari

Urejeni par s *prvo komponento (koordinato)* a in *drugo komponento (koordinato)* b označimo z (a, b) in definiramo kot

$$(a, b) =$$

Trditev

(osnovna lastnost urejenih parov)

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ in } b = d$$

Kartezični produkt

Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov

$$A \times B = \{(a, b) ; a \in A \wedge b \in B\}$$

Kartezični produkt

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je urejena n -terica.

Definicijo kartezičnega produkta lahko razširimo na več faktorjev.

Lastnosti kartezičnega produkta

- ▶ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- ▶ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- ▶ $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Lastnosti kartezičnega produkta

- ▶ $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$
- ▶ $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies A \times B \subseteq C \times D$
- ▶ $A \times B \subseteq C \times D \wedge A \times B \neq \emptyset \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq D$
- ▶ A končna z m elementi in B končna z n elementi $\implies A \times B$ končna z $m \cdot n$ elementi.