

Osnove matematične analize

Vaje 13

1. Izračunaj dolžino loka krivulje $y = f(x)$:

(a) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ na intervalu $[0, 1]$,

(b) * $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\log(x)}{2}$ na $[1, e]$.

Rešitev: (a) $l = \sinh(1) = \frac{e^2 - 1}{2e}$, (b) $l = \frac{e^2 + 1}{4}$.

2. * Izračunaj obseg astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Rešitev: $o = 6$.

3. * Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije

$$f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$$

zavrtimo okrog abscisne osi na intervalu $[1, \infty]$.

Rešitev: $V = 3\pi$.

4. * Izračunaj naslednje integrale, ali pa utemelji, zakaj ne obstajajo.

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{x+1} dx$

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} dx$

(d) $\int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

(e) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} dx$

(f) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-1} dx$

(g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$

(h) $\int_0^x t|t| dt$

(i) $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$

(j) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{2+x^2} dx$

(k) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \log x} dx$

(l) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 4x + 3} dx$

Rešitev: (a) ne konvergira (b) 2 (c) ne konvergira (d) 1 (e) $\frac{1}{2} \log 3$ (f) ne konvergira (g) 1.

5. Poišči tisti nedoločeni integral funkcije $f(t) = \tan t$, ki ima pri $t = \pi/4$ vrednost 0.