

Osnove matematične analize

Vaje 11

1. * Med točkami (x, y) v ravnini, ki zadoščajo zvezi $y = \frac{1}{x}$, poišči tiste, za katere je $f(x, y) = x^2 + y^2$ najmanjša. Rezultat geometrijsko interpretiraj.

Rešitev: $(1, 1)$ in $(-1, -1)$.

2. Dana je funkcija $f(x, y) = (x^2 + \frac{3}{4}) \cdot e^{-x^2 - y^2}$. Poišči lokalne ekstreme in pri vsakem ugotovi, za katero vrsto ekstrema gre.

Rešitev: $(\frac{1}{2}, 0)$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$ sta lokalna maksimuma.

3. Določi vse stacionarne točke funkcije

(a) * $f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$,

(b) * $f(x, y) = x^4 + y^4 - 36xy$,

(c) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$.

Rešitve:

(a) $(5, 0)$ je lokalni minimum, $(-5, 0)$ lokalni maksimum, $(3, 4)$ in $(-3, -4)$ sta sedli,

(b) $(0, 0)$ je sedlo, $(3, 3)$ in $(-3, -3)$ sta lokalna minimuma,

(c) $(0, 0)$ je lokalni maksimum, $(2, 0)$ je lokalni minimum.

4. Poišči minimum in maksimum funkcije $f(x, y) = xy$ na krogu

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Rešitev: V notranjosti kroga ni ekstremov (točka $(0, 0)$ je sedlo). Na krožnici sta minimuma v $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, maksimuma sta v $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

5. * Na voljo imamo l metrov dolgo tanko palico. Iz nje izrežemo 12 krajših palic, iz katerih je mogoče sestaviti ogrodje kvadra. Izračunaj, kako dolge stranice kvadra moramo izrezati, da bomo dobili kvader z največjo možno površino.

Rešitev: Površina bo največja, ko bo kvader kocka.

6. Na kakšne kose moramo razrezati l metrov dolgo palico, da bo ploščina osnovne ploskve dobljenega kvadra enaka A , kvader z izrezanim skeletom pa bo imel največji možni volumen?

Rešitev: Volumen bo največji, ko bo kvader kocka.