

Diskretne strukture UNI

Vaje 9

1. Na $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ je podana relacija R s predpisom

$$aRb \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k | a \Leftrightarrow 2^k | b).$$

- (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
 - (b) Poišči $[4]_R$.
 - (c) Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?
2. Imejmo množico izjavnih veznikov $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo $\leq$ tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B .
- (a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.
 - (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).
 - (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?
 - (d) Je relacija $\leq$ simetrična?
3. Naj bo $\leq$ refleksivna in tranzitivna relacija na $\mathcal{P}(N)$ iz prejšnje naloge. Z uporabo te relacije definiramo novo relacijo $\sim$ na $\mathcal{P}(N)$ z opisom

$$A \sim B \Leftrightarrow A \leq B \wedge B \leq A.$$

- (a) Prepričaj se, da je relacija $\sim$ ekvivalenčna.
 - (b) Opiši ekvivalenčni razred $[\{\neg, \vee\}]$. Naštej vsaj 5 elementov ekvivalenčnega razreda $[\{\neg, \Leftrightarrow\}]$.
 - (c) Na $\mathcal{P}(N)/\sim$ definiramo relacijo $\preceq$ tako: $[A] \preceq [B]$ natanko tedaj, ko $A \leq B$. Utemelji, da je ta definicija smiselna, in se prepričaj, da je $\preceq$ delna urejenost.
4. Naj bo B_n množica naravnih števil od 0 do $2^n - 1$. Ta števila predstavimo v dvojiškem zapisu; število $b \in B_n$ zapišemo kot $b = b_n \dots b_2 b_1$, kjer so številke b_i enake 0 ali 1. Na B_n definiramo relacijo $\leq$ z

$$a \leq b \Leftrightarrow \forall i (a_i \leq b_i).$$

- (a) Ali velja: $2 \leq 3$, $5 \leq 8$, $4 \leq 5$?
 - (b) Prepričaj se, da je $\leq$ relacija delne urejenosti.
 - (c) Skiciraj Hassejev diagram te delne urejenosti v primeru $n = 3$.
 - (d) Ali je $\leq$ relacija linearne urejenosti? Za kateri n oziroma zakaj ne? Kako to sledi iz Hassejevega diagrama?
 - (e) Preveri, da velja implikacija: Če $a \leq b$, potem $a \leq b$.
5. V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je dana relacija

$$xRy \Leftrightarrow 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$

- (a) Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.
- (b) Določi ekvivalenčni razred $[1]_R$ števila 1.
- (c) Določi moč faktorske množice $\mathbb{Z}/R$.

6. Funkcija $\sigma_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_0(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_0(n) = \text{število vseh deliteljev } n.$$

Ali je σ_0 injektivna? Ali je σ_0 surjektivna?

7. Funkcija $\sigma_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_1(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_1(n) = \text{vsota vseh deliteljev } n.$$

- (a) Izračunaj $\sigma_1(n)$ za $n \in \{1, 2, \dots, 11\}$.
 - (b) Poišči vse n , za katere je $\sigma_1(n) = 12$.
 - (c) Ali obstaja n , da je $\sigma_1(n) = 2n$? Ali ima enačba $\sigma_1(n) = 2n$ neskončno rešitev?
 - (d) Ali je σ_1 injektivna? Ali je σ_1 surjektivna?
8. (a) Poišči injektivno funkcijo $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$.
- (b) Poišči surjektivno funkcijo $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$.