

Osnove matematične analize

Vaje 9

1. Z uporabo linearne aproksimacije približno izračunaj naslednje vrednosti:

(a) $\sqrt[3]{28}$,

(d) $\log 0.9$,

(b) $\sqrt[4]{260}$,

(c) $\sin(\frac{2\pi}{9})$,

(e) $\log \sqrt{\sin(-0.05) + 0.95}$.

Rešitve: (a) 3.037 (3.036555...), (b) 4.016 (4.01553...), (c) 0.645 (0.6427876...), (d) -0.1 (-0.10536...), (e) -0.05 (-0.05267...).

2. * Poišči točko T na premici $y = x$ za katero je vsota kvadratov razdalj do točk $(-1, 4)$ in $(3, 6)$ najmanjša možna.

Rešitev: $T(3, 3)$.

3. * Med vsemi enakokrakimi trikotniki z danim obsegom o poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

Rešitev: Ploščina bo največja, ko bo trikotnik enakostraničen.

4. S pomočjo logaritmiranja poišči odvode naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = x^x$,

(b) $f(x) = x^{1/x}$.

Rešitvi: (a) $x^x(\log x + 1)$, (b) $x^{(-2+1/x)}(1 - \log x)$.

5. * Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$g(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 5.$$

Rešitev: Lokalni maksimum je 181 pri $x = -2$, lokalni minimum je -8 pri $x = 1$.

6. * Z L'Hospitalovim pravilom izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(2x)}{x - \sin(3x)}$,

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \cdot \tan(x)$,

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$.

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + e^x}{2x^3}$,

Rešitve: (a) $-\frac{3}{2}$, (b) 1, (c) ∞ , (d) $\frac{1}{2}$, (e) 0.

7. * Določi intervale konveksnosti in konkavnosti za spodnji funkciji in skiciraj grafa.

(a) $f(x) = x e^{-x}$,

(b) $g(x) = x \log(x)$.

8. Natančno nariši graf spodnjih funkcij (določi definicijsko območje, ničle, simetrijo, limite na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje).

$$(a) \quad f(x) = \frac{-2x}{x^2+4}$$

$$(b) \quad * \quad f(x) = x \log(x)$$

Rešitve:

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ničla pri $x = 0$, lokalni maksimum pri $x = -2$, $f(-2) = \frac{1}{2}$, lokalni minimum pri $x = 2$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, konveksna na $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$, konkavna na $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, $f(\pm 2\sqrt{3}) = \mp \frac{\sqrt{3}}{4} \approx \mp 0.4$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$.

(b) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$, ničla pri $x = 1$, lokalni minimum pri $x = \frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \approx -0.37$, je konveksna, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$.