

Osnove matematične analize

Vaje 7

1. Skiciraj graf funkcije f za $a = -1$ in $b = 1$. Nato določi taki konstanti a in b (če obstajata), da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ \sin(4x), & 0 < x \leq \frac{8\pi}{3}, \\ \frac{b\sqrt{3}}{x}, & x > \frac{8\pi}{3}. \end{cases}$$

Rešitev: $a = 0$, $b = \frac{4\pi}{3}$.

2. * Določi konstanto a (če obstaja), da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Rešitev: Tak a ne obstaja, ker sta leva in desna limita v točki $x = 0$ različni.

3. * Določi konstanti a in b , da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)(x-2)}{x}, & x < 0, \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2e^{x-1} - \cos(\pi x), & x > 1. \end{cases}$$

Rešitev: $a = 9$, $b = -6$.

4. * Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1}, & x \geq 0, \\ x-1, & x < 0. \end{cases}$$

zvezna na intervalu $[-2, 2]$. Poišči največjo vrednost M in najmanjšo vrednost m , ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba $f(x) = 0$ rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba $f(x) = 3$? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev: $m = -3$, $M = \frac{1}{3}$. Enačba $f(x) = 0$ ima rešitev $x = 1$. Enačba $f(x) = 3$ ni rešljiva, ker $3 \notin [m, M]$.

5. Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ (x-2)^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

zvezna na intervalu $[-1, 4]$. Poišči največjo vrednost M in najmanjšo vrednost m , ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba $f(x) = 0$ rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba $f(x) = 5$? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev: $M = 4$, $m = -1$. Enačba $f(x) = 0$ ima rešitvi $x = 0$ in $x = 2$. Enačba $f(x) = 5$ ni rešljiva, ker $5 \notin [m, M]$.