

Diskretne strukture UNI

Vaje 5

1. Naj bodo področje pogovora naravna števila in naj bodo predikati

$$\begin{aligned}P(x) &: x \text{ je praštevilo.} \\D(x, y) &: \text{število } x \text{ deli število } y\end{aligned}$$

Določi logične vrednosti formul

- (a) $\forall x(P(x) \vee D(2, x))$
- (b) $\exists x(P(x) \wedge D(2, x))$
- (c) $\exists x(P(x) \wedge D(5, x))$
- (d) $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg D(10, x))$
- (e) $\forall x(D(4, x) \Rightarrow D(2, x))$
- (f) $\forall x \exists y(P(y) \wedge D(y, x))$
- (g) $\exists x \forall y(D(x, y) \Rightarrow \neg P(y))$
- (h) $\forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y) \wedge D(y, x))$

Zapiši še negacije formul.

2. Na otoku ljudje živijo v Severni vasi in Južni vasi. Otočani imajo črne in bele ovce. Zapiši s formulami naslednje izjave.

- (a) Vsak prebivalec Severne vasi ima vsaj eno črno ovco.
- (b) Vsak prebivalec Južne vasi ima vsaj eno črno ovco in eno belo ovco.
- (c) Obstaja prebivalec Severne vasi, ki nima črne ovce.
- (d) Vsak prebivalec Severne vasi pozna prebivalca Južne vasi, ki ima belo ovco.
- (e) Neki prebivalec Južne vasi pozna prebivalca Severne vasi, ki ima črno ovco.
- (f) Neki prebivalec Južne vasi pozna vse prebivalce Severne vasi, ki imajo črno ovco.

3. Katere izmed formul so med sabo enakovredne in katere ne? Odgovore dobro utemelji!

$$\begin{aligned}A &= \forall y \exists x(P(x) \vee \neg Q(y)) & B &= \forall y(\exists x \neg P(x) \vee Q(y)) \\C &= \exists x(P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)) & D &= \exists y(P(y) \vee \forall x \neg Q(x))\end{aligned}$$

4. Katere izmed spodnjih formul so enakovredne?

$$\begin{aligned}A &= \exists x(\forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y R(x, y)), \\B &= \exists x(\forall y P(y, x) \Rightarrow \forall y R(x, y)), \\C &= \exists x(\forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y R(y, x)).\end{aligned}$$

5. Poišči interpretacije, v katerih imajo naslednji pari izjavnih formul nasprotno logično vrednost.

- (a) $\forall x(P(x) \Rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \Rightarrow R(x))$
- (b) $\forall x(P(x) \Leftrightarrow R(x)), \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$

$$(c) \quad \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y)), 0$$

$$(d) \quad \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y)), 1$$

6. Pokaži, da sta formuli

$$F_1 = \neg \exists x ((\neg R(x) \Rightarrow P(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow R(x)))$$

in

$$F_2 = \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg \exists y R(y)$$

enakovredni.

7. Na množici celih števil $\mathbb{Z}$ je definiran predikat $P(m, n)$. Zanj vemo, da so za vsak par celih števil m in n resnične naslednje izjave:

$$P0. \quad P(0, 0),$$

$$P1. \quad P(m, n) \Leftrightarrow P(m, n + 2),$$

$$P2. \quad P(m, n) \Leftrightarrow P(m + 2, n - 1),$$

$$P3. \quad P(m, n) \Leftrightarrow P(m - 1, n - 1).$$

Katere od naslednjih izjav so resnične?

$$(a) \quad P(1, 1),$$

$$(b) \quad P(2, 5),$$

$$(c) \quad \forall m \forall n P(m, n)$$