

Osnove matematične analize

Vaje 4

1. Izračunaj naslednje limite zaporedij:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1} - n + 3}{\sqrt{n^4 + n - 1} + n - 6}$$

Rešitve: (a) $-\frac{1}{2}$, (b) 3, (c) 0, (d) 1.

2. * Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{-2}{a_n + 3},$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: Zaporedje je padajoče in navzdol omejeno z -1 , zato je konvergentno. Limita je -1 .

3. Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$a_0 = -3, \quad a_{n+1} = e^{a_n} - 1,$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa če vzamemo za prvi člen zaporedja $a_0 = 3$?

Rešitev: Zaporedje je naraščajoče in navzgor omejeno z 0, zato je konvergentno. Limita je 0. Če za prvi člen vzamemo 3, je še vedno naraščajoče, vendar ni navzgor omejeno in zato ne konvergira.

4. * Izračunaj limite naslednjih zaporedij.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n}{n+1} \right)^{2n-1}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} n (\log(n+1) - \log n)$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin(n^2) + n - 6}{n^3 - n + 1}$$

Rešitve: (a) $\frac{1}{e}$, (b) e^2 , (c) 1, (d) 0.

5. * Podani sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} \quad \text{ter} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n.$$

Za vsako izmed omenjenih vrst

(a) ugani in dokaži formulo za n -to delno vsoto ter

(b) po definiciji izračunaj vsoto vrste, če obstaja.

Rešitve: Prva vrsta konvergira k $\frac{3}{2}$, delne vsote so $s_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Druga vrsta divergira, ker je alternirajoča, členi pa ne konvergirajo k 0.

6. Izračunaj vsoto naslednjih geometrijskih vrst.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^n}$
 (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}$
 (c) $3/2 + 1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots$

- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3 \cdot 2^{3n-2}}$
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{3n}$, za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere vrsta konvergira.

Rešitve: (a) 5, (b) $\frac{4}{21}$, (c) $\frac{9}{2}$, (d) $-\frac{4}{15}$, (e) $\frac{x^3}{8-x^3}$.

7. Izračunaj obseg Hilbertove krivulje.

