

# Osnove matematične analize

## Vaje 4

1. Izračunaj naslednje limite zaporedij:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2 + 1} - n + 3}{\sqrt{n^4 + n - 1} + n - 6}$$

Rešitve: (a)  $-\frac{1}{2}$ , (b) 3, (c) 0, (d) 1.

2. \* Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$a_0 = 0, a_{n+1} = \frac{-2}{a_n + 3},$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: Zaporedje je padajoče in navzdol omejeno z  $-1$ , zato je konvergentno. Limita je  $-1$ .

3. Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$a_0 = -3, a_{n+1} = e^{a_n} - 1,$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa če vzamemo za prvi člen zaporedja  $a_0 = 3$ ?

Rešitev: Zaporedje je naraščajoče in navzgor omejeno z  $0$ , zato je konvergentno. Limita je  $0$ . Če za prvi člen vzamemo  $3$ , je še vedno naraščajoče, vendar ni navzgor omejeno in zato ne konvergira.

4. \* Izračunaj limite naslednjih zaporedij.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{n}{n+1} \right)^{2n-1}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} n (\log(n+1) - \log n)$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin(n^2) + n - 6}{n^3 - n + 1}$$

Rešitve: (a)  $\frac{1}{e}$ , (b)  $e^2$ , (c) 1, (d) 0.

5. \* Podani sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} \quad \text{ter} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n.$$

Za vsako izmed omenjenih vrst

(a) ugani in dokaži formulo za  $n$ -to delno vsoto ter

(b) po definiciji izračunaj vsoto vrste, če obstaja.

Rešitev: Prva vrsta konvergira k  $\frac{3}{2}$ , delne vsote so  $s_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ . Druga vrsta divergira, ker je alternirajoča, členi pa ne konvergirajo k 0.

6. Izračunaj vsoto naslednjih geometrijskih vrst.

(a) \*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^n}$

(b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}$

(c) \*  $3/2 + 1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3 \cdot 2^{3n-2}}$

(e) \*  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{3n}$ , za tiste  $x \in \mathbb{R}$ , za katere vrsta konvergira.

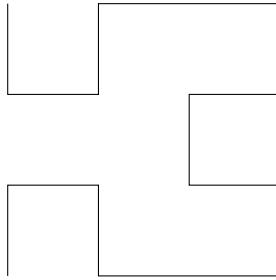
Rešitve: (a) 5, (b)  $\frac{4}{21}$ , (c)  $\frac{9}{2}$ , (d)  $-\frac{4}{15}$ , (e)  $\frac{x^3}{8-x^3}$ .

7. Izračunaj obseg Hilbertove krivulje.

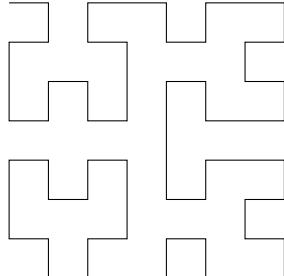
$n = 1$



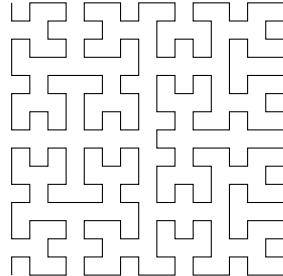
$n = 2$



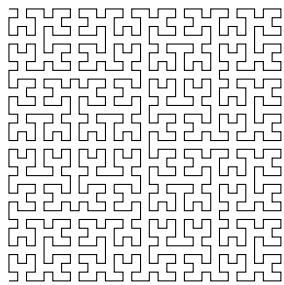
$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$



$n = 6$

