

Osnove matematične analize

Vaje 2

1. Število $z = \frac{1+3i}{1-i}$ zapiši v obliki $x + iy$ in izračunaj $|z|$ ter $\arg(z)$.

Rešitev: $z = -1 + 2i$, $|z| = \sqrt{5}$, $\arg(z) = 2.03$.

2. * Nariši množico točk:

- (a) $|\bar{z} + 2 - i| \leq 2$,
- (b) $\operatorname{Re}(\bar{z} + 2 - i) \leq 2$,
- (c) $\operatorname{Im}(\bar{z} + 2 - i) \leq 2$.

Rešitve: prva množica je krog z radijem 2 in središčem $(-2, -1)$, druga je polravnina $\{x \leq 0\}$, tretja je polravnina $\{y \geq -3\}$.

3. * Reši naslednje enačbe:

- (a) $z^2 + z = 1$,
- (b) $(2 + i)z + 2z - 3 = 4 + 6i$.

Rešitve: (a) $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, (b) $z = 2 + i$.

4. * Reši naslednje enačbe:

- (a) $2z^2 - 3\bar{z}^2 = 10i$,
- (b) $\bar{z} - iz^2 = 0$.

Rešitve: (a) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$, (b) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

5. Z uporabo polarne oblike in de Moivreove formule izračunaj

- (a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^8$,
- (b) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{20}$,
- (c) $(1 - i)^{5000}$,
- (d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Rešitve: (a) $\frac{1}{16}$, (b) $2^{19}(-1 + i\sqrt{3})$, (c) 2^{2500} , (d) $2^9(1 - i\sqrt{3})$.

6. * Nariši naslednjo podmnožico v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; 1 < |z| < 4, 0 \leq \arg(z) < \pi/4, \operatorname{Im}(z) < 2\}$$

Z območjem A naredimo naslednjo transformacijo:

- (a) prezrcalimo ga preko osi $\operatorname{Re}(z)$,
- (b) zavrtimo ga okoli števila 0 za kot π ,
- (c) premaknemo ga za 2 v desno in 3 navzdol.

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi to kompleksno transformacijo. Nariši tudi $f(A)$ in ugotovi, kam se preslika število $1 + i$.

Rešitev: $z \mapsto -\bar{z} + 2 - 3i$, $1 + i \mapsto 1 - 2i$.

7. * Nariši naslednjo podmnožico v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) < \sqrt{2}/2, 0 < \operatorname{Re}(z) < \sqrt{2}/2\}$$

Z območjem A naredimo naslednjo transformacijo:

- (a) zavrtimo ga okoli števila 1 za kot $-\pi/2$;
- (b) prezrcalimo ga preko osi $\operatorname{Re}(z)$;
- (c) premaknemo ga za 2 v levo in 1 navzdol;
- (d) zavrtimo ga okoli števila i za kot $\pi/2$.

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi to kompleksno transformacijo. Nariši tudi $f(A)$ ter ugotovi, kam se preslika število $1 + i$.

Rešitev: $z \mapsto -\bar{z} + 3$, $1 + i \mapsto 2 + i$.

8. Nariši naslednje podmnožice v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; 1 < |z| < 3, 0 \leq \operatorname{Arg}(z) < \pi/2\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} ; 1/3 < |z - 1| < 3, 0 \leq \operatorname{Arg}(z - 1) < \pi\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} ; 1 < |z| < 3, \pi < \operatorname{Arg}(z) \leq 3\pi/2\}.$$

Nato poišči kompleksne transformacije, ki transformirajo A v B , A v C in C v A .

Rešitev: $f_{AB}: z \mapsto \frac{1}{3}z^2 + 1$, $f_{CA}: z \mapsto -i\bar{z}$, $f_{AC}: z \mapsto -i\bar{z}$.