

Osnove matematične analize

Vaje 3

1. * Reši naslednje enačbe:

(a) $z^2 = 1 + i$,

(b) $z^3 = -\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}}i$,

(c) $z^6 = -64i$,

(d) $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$.

Rešitve: (a) $r = \sqrt[4]{2}$, $\varphi_k = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k = 0, 1$, (b) $r = 3$, $\varphi_k = \frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi k}{12}$, $k = 0, 1, 2$, (c) $r = 2$, $\varphi_k = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi k}{12}$, $k = 0, 1, \dots, 5$, (d) $r = \sqrt[4]{2}$, $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi k}{6}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

2. * Poišči algebraično enačbo stopnje 3 z realnimi koeficienti, ki ima eno od rešitev $1 + i$, vsoto rešitev pa 4.

Rešitev: $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$.

3. * Poišči algebraično enačbo stopnje 3 z realnimi koeficienti, ki ima eno od rešitev $\frac{1}{2}$, vsaj eno rešitev iz $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, produkt rešitev 5, vsoto rešitev pa $\frac{5}{2}$.

Rešitev: $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 11x - 5 = 0$.

4. Če je $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ rešitev algebraične enačbe z realnimi koeficienti, potem je tudi $\bar{w}$ rešitev. Za algebraične enačbe s kompleksnimi koeficienti to več ne velja. Poišči primer in ugotovi, kateri korak v dokazu zgornje trditve ne velja v primeru kompleksnih koeficientov.

Rešitev: npr. $x - w = 0$.

5. * Za vsako izmed spodnjih zaporedij razišči monotonost, omejenost in konvergenco. Če imajo limo določi tudi prvi člen zaporedja, ki je od nje oddaljen za manj kot $\frac{1}{10}$.

(a) $a_n = \frac{n}{3n-1}$

(b) $a_n = \frac{2^n-4}{2^n+4}$

(c) $a_n = -\frac{n^2+n}{n^2+1}$

Rešitve:

(a) padajoče od $n = 1$ naprej, navzdol omejeno z 0, limita je $\frac{1}{3}$, $n_0 = 2$,

(b) naraščajoče, navzgor omejeno z 1, limita je 1, $n_0 = 7$,

(c) naraščajoče od $n = 2$ naprej, navzgor omejeno z 0, limita je -1 , $n_0 = 1$.

6. Izračunaj naslednje limite zaporedij:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1} - n + 3}{\sqrt{n^4 + n - 1} + n - 6}$

Rešitve: (a) $-\frac{1}{2}$, (b) 3, (c) 0, (d) 1.