

Iskanje lokalnega minimuma funkcije več spremenljivk

Tokrat nas bo zanimalo, kako poiskati (lokalni) minimum funkcije $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $U \subseteq \mathbb{R}^n$. (To seveda že znamo s primerno uporabo Newtonove metode.) Z *metodo najhitrejšega spusta* (ali z *gradientno metodo*) iščemo minimum funkcije $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tako, da začnemo z nekim začetnim približkom $\mathbf{x}^{(0)}$, nato pa iterativno nadaljujemo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} - h \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^{(0)}), \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(1)} - h \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^{(1)}), \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} - h \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^{(k)}),\end{aligned}$$

kjer je korak $h > 0$ primerno izbrano (majhno) realno število. (Konvergenca take metode je odvisna od funkcije f , začetnega približka $\mathbf{x}^{(0)}$ in izbire h .)

1. Funkcija f ima predpis

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 4(y - x^2)^2.$$

- (a) Poišči minimum funkcije f .
- (b) Poišči (približek za) minimum funkcije f z metodo najhitrejšega spusta. V octave-u napiši funkcijo `x = gradmet(gradf, h, x0, tol, maxit)`, ki izvede to metodo za funkcijo f z gradientom `gradf`, korakom h in začetnim približkom x_0 . (Z `maxit` omejimo največje dovoljeno število iteracij, v `tol` pa predpišemo zahtevano natančnost.)
2. Recimo, da imamo dve krožnici, K in L , prvo s središčem v (a, b) in polmerom r , drugo s središčem v (a', b') in polmerom r' . Poiskati želimo razdaljo d med tema dvema krožnicama in točki $P \in K$ ter $Q \in L$, ki sta najbližje skupaj.
 - (a) Izrazi razdaljo d med tema dvema krožnicama analitično. (Zgolj za primerjavo s spodnjim postopkom.)
 - (b) Zapiši parametrizaciji $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ krožnic K in L .
 - (c) Naj bo $f(t, u) = \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(u)\|^2$. Izrazi $\operatorname{grad} f$ s parametrizacijama $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ (ter odvodoma $\dot{\mathbf{p}}$ in $\dot{\mathbf{q}}$).
 - (d) V octave-u napiši funkcijo `[d, T] = razdaljaK(K)`, ki z metodo najhitrejšega spusta poišče minimum funkcije f , tj. razdaljo med tema dvema krožnicama. Argument K je 3×2 matrika, s prvim stolpcem $[a, b, r]^T$ in drugim stolpcem $[a', b', r']^T$. Funkcija naj vrne razdaljo d in 2×2 matriko T s krajevnima vektorjema točk P in Q , tj. $T = [\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_Q]$.
 - (e) Kako bi na podoben način poiskal točki na krožnicah K in L , ki sta najbolj oddaljeni? Kako bi na podoben način poiskal razdaljo med dvema elipsama?
3. Ali bi znal najmanjše razdalje v prejšnji nalogi poiskati tudi z uporabo Newtonove ali Gauss–Newtonove metode? Poskusi in primerjaj z gradientno metodo.

4. Z malce iznajdljivosti lahko gradientno metodo uporabimo tudi za reševanje sistemov nelinearnih enačb. Reševanje sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ prevedemo na iskanje minimuma funkcije $f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})^\top \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2$.

(a) Preveri, da velja

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = 2J\mathbf{F}(\mathbf{x})^\top \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

En korak gradientne metode za $f = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$ je torej

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - 2hJ\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

(Primerjaj to z enim korakom Newtonove iteracije.)

- (b) Z uporabo gradientne metode poišči vsaj eno rešitev sistema

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_2^2 - 1 &= 0, \\x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$